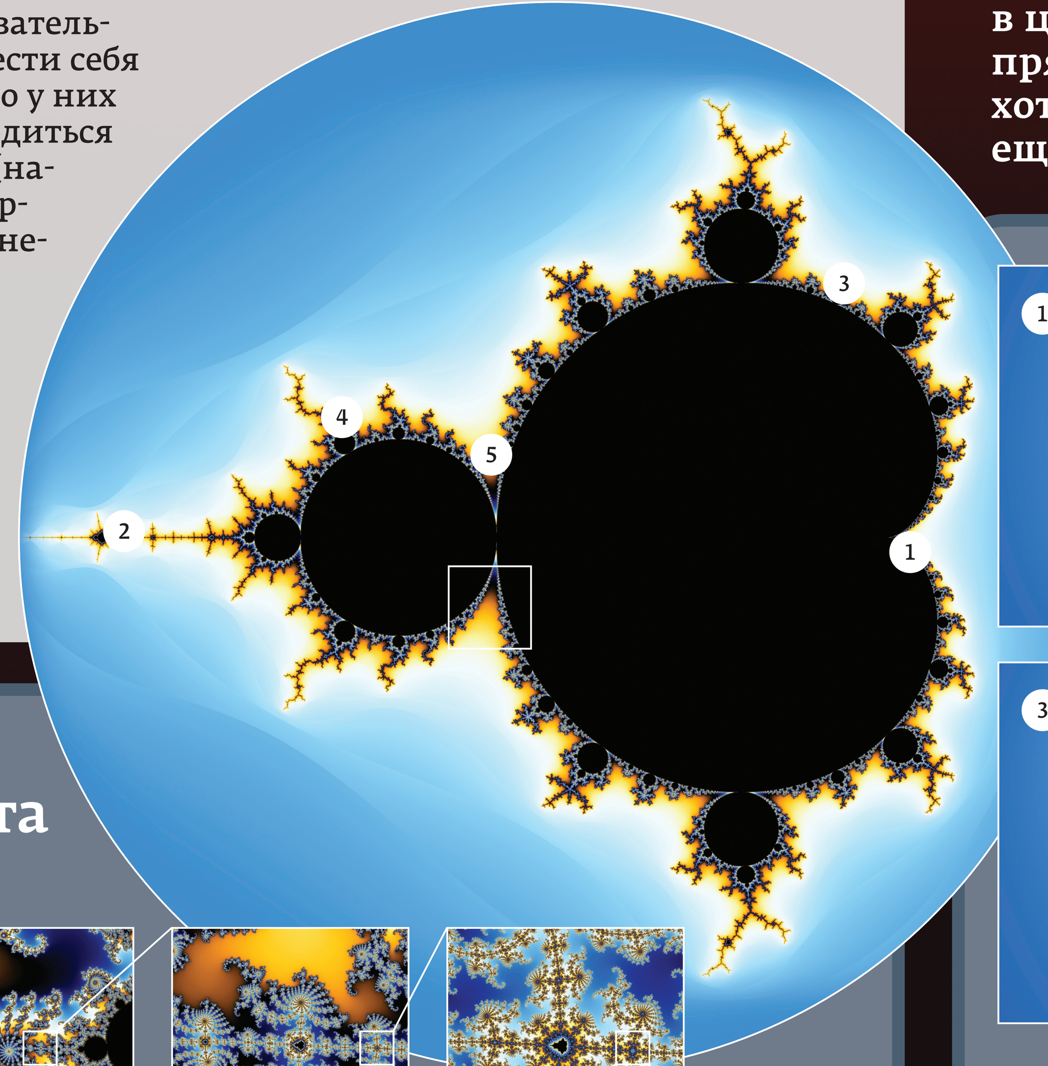
ФРАКТАЛЫ

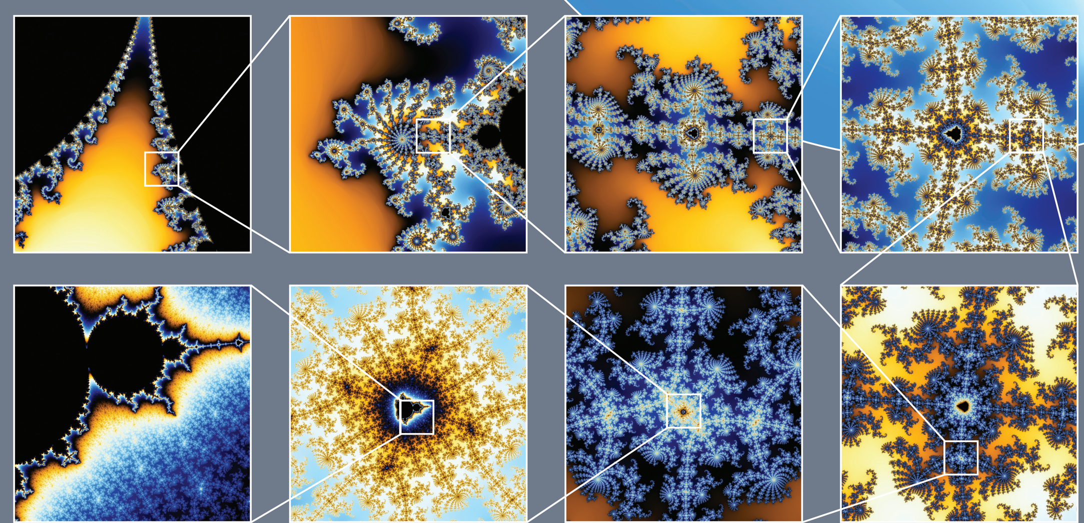
Важнейшее свойство фрактала — *самоподобие*: любая его часть, даже очень маленькая, при сильном увеличении (как будто под микроскопом) похожа на фрактал в целом. Однако этого недостаточно: прямая и отрезок — не фракталы, хотя они и самоподобны. Нужна еще *тонкая структура*: фрактал должен иметь сложное строение *при любом увеличении*. У фракталов есть и другие интересные свойства, но их формулировка требует уже глубокого погружения в математику. По способу построения фракталы условно делятся на *динамические* (алгебраические) и *геометрические* (конструктивные).

ДИНАМИЧЕСКИЕ ФРАКТАЛЫ

Фракталы этого типа строятся по однозначному правилу f, которое переводит каждую точку плоскости ровно в одну точку этой же плоскости. Начав с точки A, можно построить последовательность точек: A; $A_1 = f(A)$; $A_2 = f(A_1)$; $A_3 = f(A_2)$; и т. д. В зависимости от начальной точки получаются последовательности, которые могут вести себя по-разному (говорят, что у них разная ***динамика***): 1) сходиться к какому-либо пределу (например, к одному из корней какого-нибудь уравнения), 2) зацикливаться, 3) расходиться к бесконечности (точки неограниченно удаляются от начала). Можно считать, что правило f делит плоскость на несколько областей, в каждой из которых точки ведут себя одинаково — например, сходятся к одному из возможных пределов. Оказывается, что во многих случаях границы таких областей устроены очень сложно и являются фракталами.

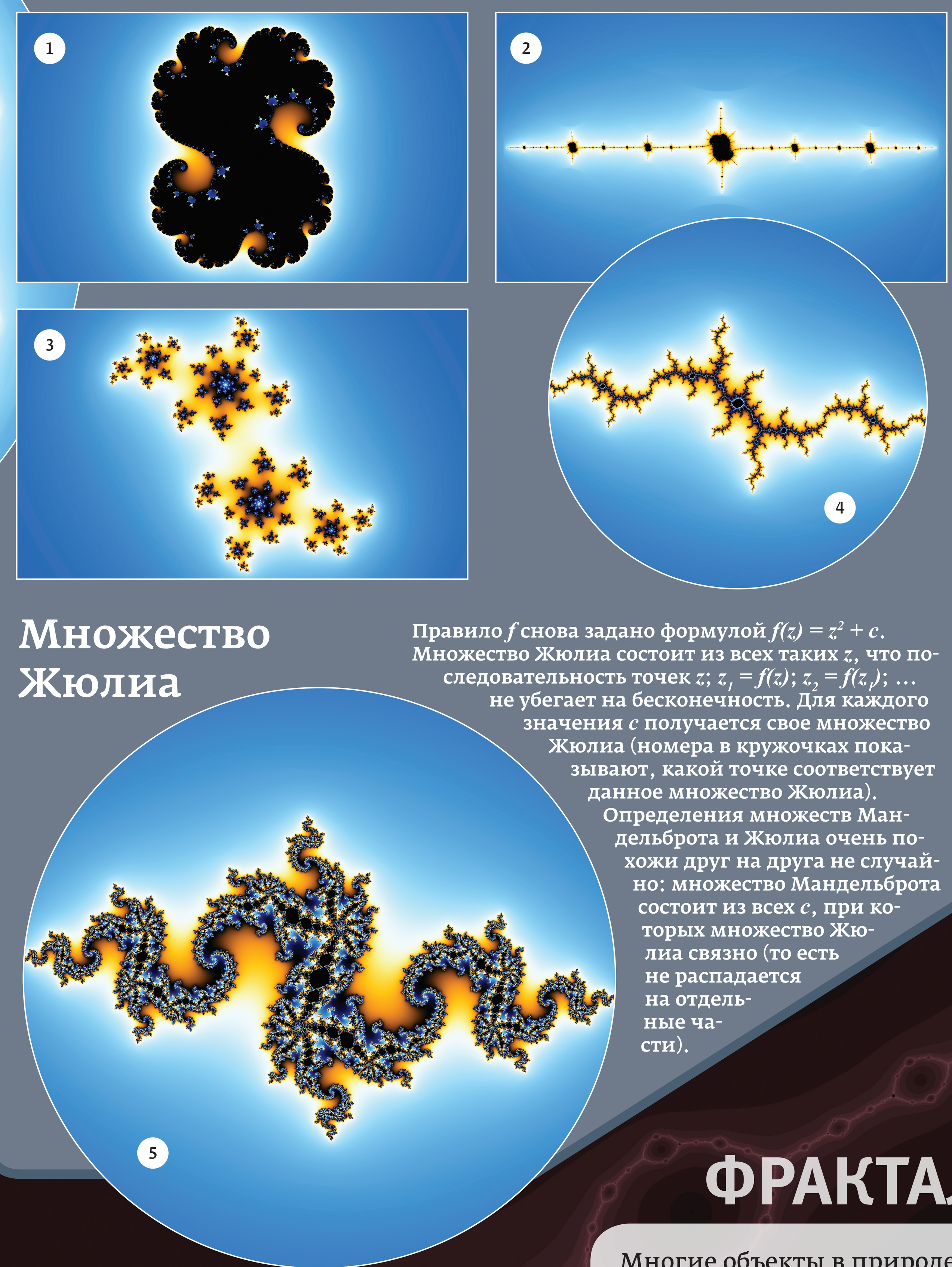


Множество Мандельброта



Пожалуй, это самый знаменитый фрактал. Здесь правило f задано формулой: $f(z) = z^2 + c$, где z и c — *комплексные числа*. Каждой точке на прямой соответствует то или иное действительное число, а каждой точке на плоскости — комплексное. Для комплексных чисел, как и для действительных, определены операции сложения и умножения. Множество Мандельброта — черная область на иллюстрациях — состоит из всех таких c, что последовательность точек $z_0 = 0$; $z_1 = 0^2 + c = c$; $z_2 = c^2 + c$; $z_3 = (c^2 + c)^2 + c$; … не убегает на бесконечность, то есть все эти точки лежат внутри некоторого круга с центром в начале координат. На увеличенных изображениях видна крайне сложная структура множества вблизи границы. Можно заметить островки, подобные большой черной области.

Множество Жюлиа



Правило f снова задано формулой $f(z) = z^2 + c$. Множество Жюлиа состоит из всех таких z, что последовательность точек z; $z_1 = f(z)$; $z_2 = f(z_1)$; … не убегает на бесконечность. Для каждого значения c получается свое множество Жюлиа (номера в кружочках показывают, какой точке соответствует данное множество Жюлиа). Определения множеств Мандельброта и Жюлиа очень похожи друг на друга не случайно: множество Мандельброта состоит из всех c, при которых множество Жюлиа связно (то есть не распадается на отдельные части).

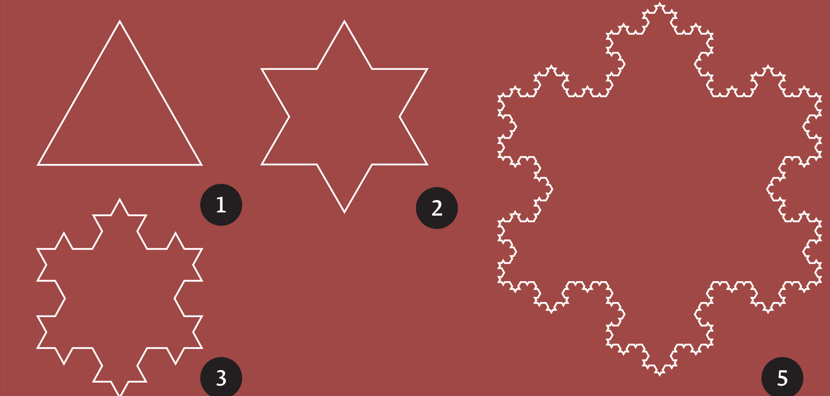
Фрактал Галлея

Правило для построения фрактала возникает из метода приближенного нахождения корней уравнений, придуманного английским астрономом и математиком Эдмундом Галлеем (который также открыл самую известную периодическую комету). Этот фрактал соответствует уравнению $z^3 = 1$.

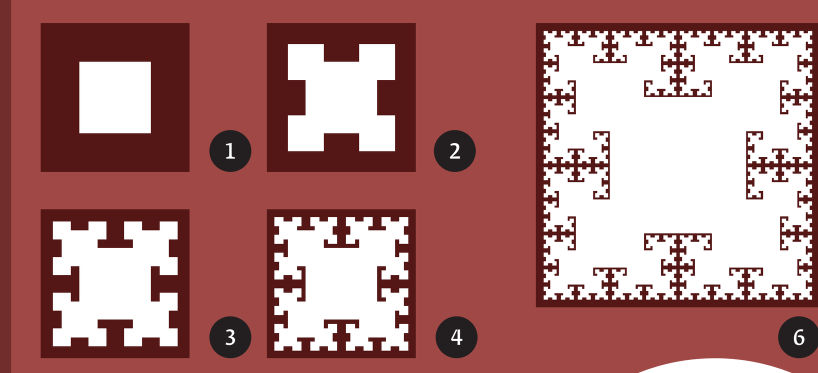
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФРАКТАЛЫ

Фракталы этого типа строятся поэтапно. Сначала изображается ***основа.*** Затем некоторые части основы заменяются на ***фрагмент.*** На каждом следующем этапе части уже построенной фигуры, аналогичные замененным частям основы, вновь заменяются на фрагмент, взятый в подходящем масштабе. Всякий раз масштаб уменьшается. Когда изменения становятся визуально незаметными, считают, что построенная фигура хорошо ***приближает*** фрактал и дает представление о его форме. Однако на самом деле для получения фрактала нужно бесконечное число этапов. Меняя основу и фрагмент, можно получить много разных геометрических фракталов.

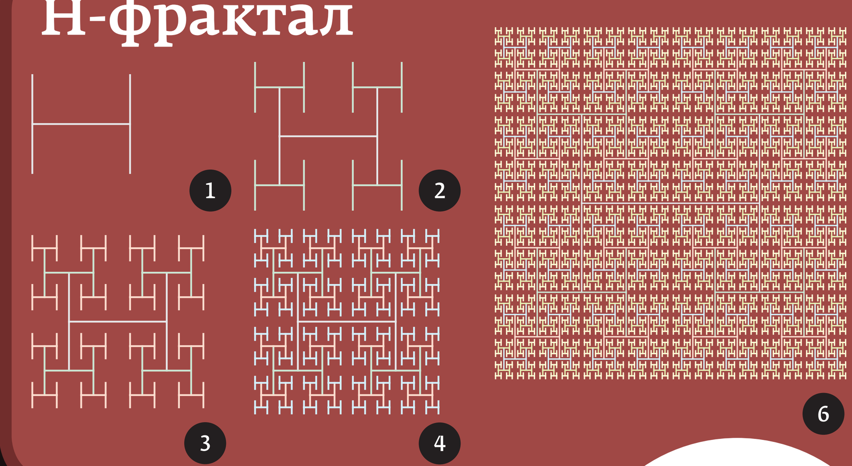
Снежинка Коха



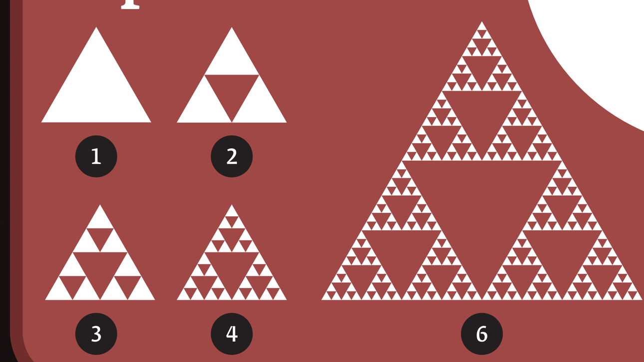
Т-квадрат

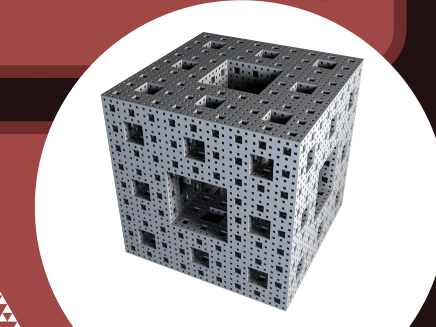


Н-фрактал



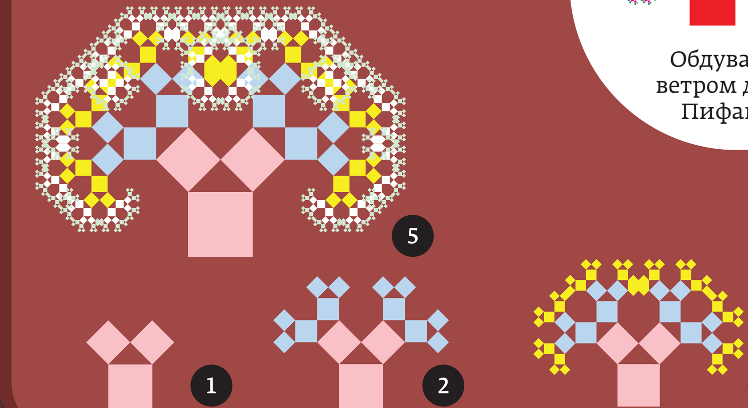
Треугольник Серпинского





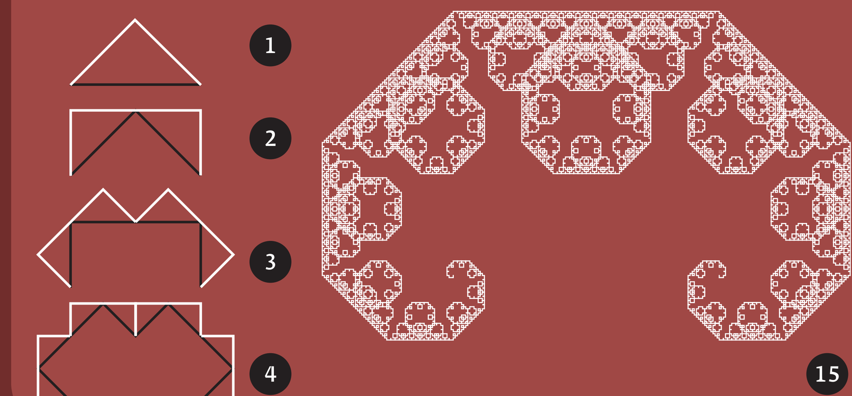
Губка Менгера

Дерево Пифагора



Обдуваемое ветром дерево Пифагора

Кривая Леви



Дракон

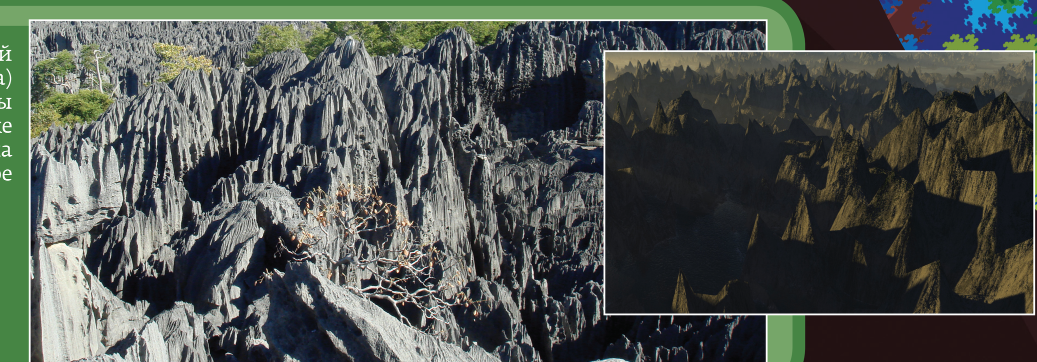
Фрактал *дракон* строится почти так же, как кривая Леви, только «уголки» от отрезков ломаной откладываются по очереди в разные стороны. Первые несколько этапов можно получить, сложив длинную полоску тонкой бумаги несколько раз пополам, а потом развернув ее под прямыми углами. У дракона есть любопытные свойства. Например, плитками такой формы можно замостить всю плоскость.

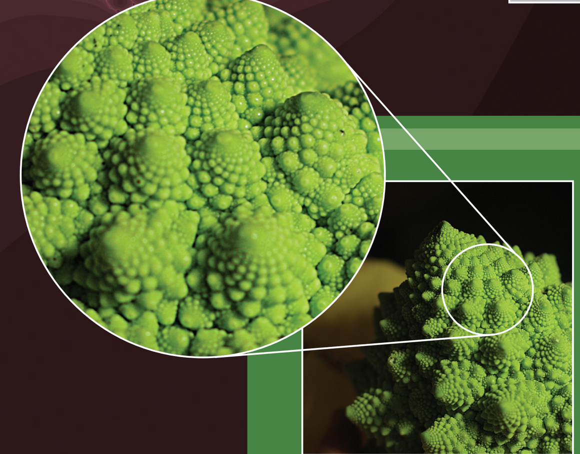
ФРАКТАЛЫ В ПРИРОДЕ

Многие объекты в природе — например, дерево, молния, береговая линия, горный рельеф, обычная мятая бумага — имеют фрактальные свойства. Это используют при их компьютерном моделировании для достижения большей реалистичности.

Смоделированное программой дерево (слева) ветвится совсем как настоящее

Компьютерный ландшафт (справа) напоминает скалы в заповеднике Цинжи-дю-Бемараха на Мадагаскаре



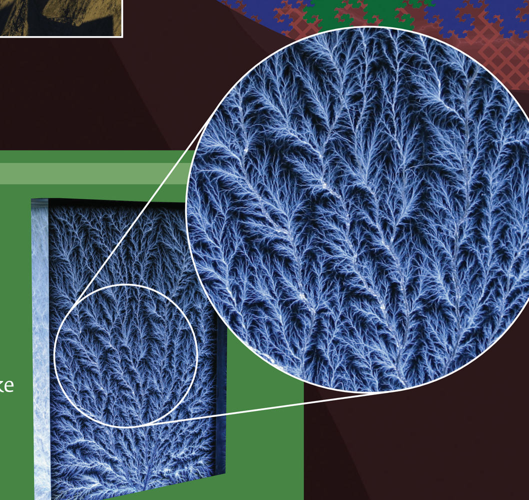


Классический пример фрактала в природе — капуста романеско

Смятый лист бумаги

Изрезанное фьордами побережье Норвегии

След от мощного электрического разряда в пластике (фигура Лихтенберга) — это молния в миниатюре



Некоммерческий проект
При поддержке Фонда Дмитрия Зимина «Династия»

Элементы elementy.ru

Династия

Узнайте больше на сайте
http://elementy.ru/posters