Содержание

1 О преподавании

Редакторы считают важным обсуждение вопросов и идей, затронутых в следующих статьях. При этом мнение авторов статей может не совпадать с мнением редакторов.

1.1 Напутствие. А.Я. Канель

Для успешного решения задач математических олимпиад высшего уровня необходимы в первую очередь общеукрепляющие средства: хорошая проработка алгебры (культура алгебраических преобразований), проработка школьной геометрии. Задачи этих олимпиад (кроме первых задач) практически всегда используют смешанный сценарий решения; редки задачи на применение некоторого метода или идеи в чистом виде. Решению таких ‘смешанных’ задач должна предшествовать работа с ключевыми задачами, в которых идеи работают в чистом виде. См., например, [0, 1] или настоящий сборник.

1.2 Олимпиады и математика. А. Скопенков

To him a thinking man’s job was not to deny one reality
at the expense of the other, but to include and to connect.
U. K. Le Guin, The Dispossessed. [1]

Перед учителями и руководителями кружков, занимающимися с сильными школьниками, встает вопрос: как подготовить школьников к олимпиадам или к ’серьезной’ математике? [2] Некоторые думают, что для первого надо прорешивать задачи последних олимпиад, для второго надо читать научную литературу, и что ввиду принципиальной разницы первого и

[1]Для него работой мыслителя было не отрицание одной реальности за счет другой, а взаимовключение и взаимосвязь. У. К. Ле Гуин, Обделчнные. (пер. автора)

[2]Это обновленный вариант введения к статье из Мат. Просвещения, 10 (2006), 57–63.

второго бессмысленно пытаться достичь и того, и другого. Автор этой заметки придерживается распространенного мнения о том, что эти подходы недостаточно эффективны и приводят к вредным 'побочным эффектам': школьники либо чрезмерно увлекаются *спортивным* элементом в решении задач, либо изучают *язык* высшей математики вместо ее содержания.

Мне кажется, что основу математического образования сильного ученика должно составлять *решение и обсуждение мотивированных для ученика задач, в процессе которых он знакомится с важными математическими идеями и теориями.* Это одновременно подготовит школьника и к математической науке, и к олимпиадам, и не нанесет вред его развитию в целом; это будет более эффективно и для достижения успеха только в олимпиадах или только в науке (если не учитывать большого количества других факторов, кроме разумной организации занятий).

Как и при естественном развитии самой математики, каждая следующая задача должна быть мотивирована либо практикой, либо уже решенными задачами (см. подробнее философско-методические коментарии, §1.4). Поэтому ученик, занимающийся 'мотивированной для него' математикой (обычно более элементарной, но содержательной и потому сложной) вместо 'немотивированной для него' математики (обычно менее элементарной, но языковой и потому тривиальной), имеет преимущество в дальнейшей учебе и научной работе. А. Н. Колмогоров говорил, что до тридцати лет математику разумнее всего заниматься решением конкретно поставленных задач. А значит, умение решать сложные задачи является одним из важнейших для молодого математика.

Олимпиадных задач очень много, большинство из них интересны школьнику и среди них много математически содержательных. Такие задачи могут составить основу изучаемого материала. Однако решение олимпиадных задач без изучения математических идей и теорий недостаточно эффективно даже для 'чистой' подготовки к олимпиадам (на долгих — год и более — промежутках времени, как и вообще решение сиюминутных задач без фундаментального развития). Кроме того, большинству людей легче достичь успеха на олимпиадах в том случае, когда они не считают успех главной целью. Сложную задачу легче решить, если спокойно думать о самой задаче, а не о награде, которая последует за ее решением. Поэтому школьник, мотивированный более высокой целью, чем успех на олимпиаде, имеет на этой олимпиаде психологическое преимущество.

Как удачно подобрать задачи для обучения учеников? Этот вопрос учителя задавали себе последние десять тысяч лет [1, предисловие], [2], [3, стр. 26-33], [5, предисловие]. Очередным примером являются материалы настоящего сборника.

1.3 Кружки и олимпиады: как дверь в математику или спорт. А.Я. Канель

1.3.1 Введение

Внешкольные занятия математикой (чему посвящена данная книга) получили значительное распространение и трудно переоценить их значение. При этом значительное число занятий так или иначе оказываются связанн с олимпиадами. Талантливых школьников и их учителей сводят вместе, прежде всего, математические олимпиады. У истоков олимпиадного движения стояли великие ученые. Многие школьники, особенно на периферии, получают математическое образование, нацеленное в первую очередь на подготовку к олимпиадам, со всеми его плюсами и минусами. (С этим надо считаться научным руководителям и организаторам учебного процесса – нравится это или нет.) И даже те, кто не занимается подготовкой к олимпиадам в тренерском смысле этого слова, активно использует идеи и задачный материал, так или иначе сопряженный с этой подготовкой. По всему миру проводятся математические конкурсы и олимпиады. Появились специалисты по их проведению, возникла олимпиадная математика со своей методикой работы и своей литературой. Олимпиадный мир стал жить собственной жизнью, но его кажущаяся самодостаточность породила ряд проблем.

Хотя научное творчество отнюдь не исчерпывается т.н. “олимпиадным” подходом (см. [12] о воспитании теоретического мышления), волею судеб то что происходит во многих летних лагерях и сборах становится достаточно важным. Назрел разговор об опасности узко спортивного подхода. При этом необходимо подчеркнуть (как это показали последние сборы) что утилитаризм оказывается неэффективен, а эстетизм (недооцениваемый учителями и тренерами в силу разных причин, указанных ниже) – имеет ключевое значение. И процессы, происходящих на олимпиадах, но это же имеет преломление и в преподавании.

1.3.2 Зачем нужны олимпиады?

Предваряя обсуждение, автор считает необходимым обозначить личное отношение к олимпиадам и олимпиадной математике. К сожалению, обоснование этой точки зрения выходит за рамки настоящей статьи. Автору близки позиции, изложенные в работах [9, 3].

Решение олимпиадных задач (разного уровня сложности) служит основой для почти всех математических кружков. Подготовка к олимпиадам оказывает значительное влияние на первоначальные занятия школьников математикой. Именно в решении трудной задачи может состоять достижение подростка. Более того, он зачастую оказывается в равном положении со взрослым. На трудных задачах вырабатывается интеллектуальная техника и соответствующие волевые качества. Но главное – сам факт достижения серьезной, но посильной цели в подростковом возрасте.

Часто утверждается, что олимпиадные умения не связаны с большой наукой, а зависимость между олимпиадными успехами и научной карьерой весьма слабая. Автор с этим категорически не согласен, поскольку препятствий для развития таланта множество. Прежде всего, человек даже очень талантливый встречается с теми или иными житейскими обстоятельствами. Они его могут надломить или даже сломать. Он может уйти в зарабатывание денег, столкнуться с семейными проблемами. Поэтому как бы мы ни выявляли таланты в юном возрасте, какая-то часть (и, увы, очень большая) из них в зрелом возрасте погаснет. (Небольшая популяция в Древней Греции поставила много великих ученых – больше, чем та же Греция произвела за последние две тысячи лет). Не исключено, что олимпиадные успехи больше говорят об изначальном таланте, чем будущее научное творчество.

Деятельность вокруг олимпиад стала заметным явлением в области современного математического образования. Их роль далеко не ограничивается обнаружением талантливых учащихся. Благодаря олимпиадной математике удается увидеть роль стандартных идей и рассуждений. Появились подборки олимпиадных задач по темам “принцип Дирихле”, “правило крайнего”, “инварианты” и др., объединенные единством метода.

Математики-непедагоги, как правило, не уделяют должное внимание “тривиальным” вещам, которые между тем играют исключительную роль как в мышлении математика, так и в подготовке к олимпиадам.

Благодаря олимпиадам возникли знаменитые книги Д. Пойа [7, 8, 6]. Да и облик так называемой “венгерской математики” (вспомним Пола Эрдчша) сформировался во многом под влиянием олимпиад.

Возможно, что выделение стандартных рассуждений может привести к революции и в самой математике, а в дальнейшем – и физике. Сама работа над изложением, казалось бы, известных результатов, часто приводила к открытиям. Так было со схемами Дынкина и с уравнением Гейзенберга. Олимпиадная математика с ее систематизацией идей и методов может послужить детонатором. Процесс детонации может начаться в комбинаторике. Мне представляется, что эта наука должна быть организована не так, как классическая область математики, а подобно некоторым тематическим подборкам олимпиадных задач. В основе ее организации должно лежать единство метода. Правильный учебник по комбинаторике должен быть чем-то вроде учебника шахматной игры или олимпиадного самоучителя.

Изначально олимпиады создавались великими и выдающимися математиками. Подробнее об истории математических олимпиад см. предисловия к книгам [5, 2], размышления В. М. Тихомирова в книге [14] а также [13, 11].

Хотя у истоков олимпиад стояли великие ученые, в последующем уровень олимпиадных деятелей постепенно снижался. (Затем – раскол научного сообщества, вызванный проблемами 70-х и начала 80-х годов, события 90-х годов усилили эту тенденцию.) Ослабла связь олимпиад с научным сообществом. Появились так называемые "олимпиадные функционеры", т.е. специалисты по организации и проведению олимпиад. В жюри многих турниров высокого уровня почти не осталось профессиональных математиков даже среднего уровня. В последние годы в некоторых странах появились олимпиадные деятели, представляющие собой "нематематиков" и в то же время пытающиеся доминировать в олимпиадном мире, иногда откровенно противопоставляя себя научному сообществу. О проблемах и издержках подробнее написано в работе [11].

1.3.3 О вкусах спорят!

На это одному из авторов указал замечательный математик и человек, ныне покойный, Ромен Васильевич Плыкин (он был организатором и председателем жюри Всероссийских конференций школьников). Великий Генрих Густавович Нейгауз (учитель Святослава Рихтера и Эмиля Гилельса) говорил, что о вкусах спорят, что вкус бывает хороший и плохой. [3]

Очевидно, что есть "прекрасное" и "безобразное" в жизни, есть понятие плохого и хорошего вкуса в живописи, в одежде и даже в еде. Можно иметь предпочтения в живописи или предпочитать китайскую кухню французской (в наше время разговор о кухне, увы, понятнее). Но если вкус человека, разбирающегося во французской кухне, вине или китайском чае, заслуживает уважения, то вкус любителя фастфуда – нет (потребитель в обществе потребления и потреблять-то не умеет!).

Любая сильная идея является в обличии красоты (beauty is power itself). Значение математика определяется не только его "пробивной силой" (т.е. возможностью "пробить" трудную задачу), но и вкусом, (что, впрочем, тесно связано). За свой вкус математик отвечает своей судьбой. Плохая эстетика задач ломает учащихся, особенно под нагрузкой. Подробнее это обсуждалось в работе [11].

Игнорируя эстетику, мы тем самым игнорируем и *силу* со всеми вытекающими последствиями. Отметим, что математики различаются на тех, кто сделал красивую работу, и кто ее не сделал. Соответственно, в советское время хорошая кандидатская диссертация базируется на одной красивой вещи (просто кандидатская – условно на трех добротных работах), а докторская – на трех красивых вещах, связанных общим сюжетом (или возраст после 50 и много добротных работ, или есть выдающийся результат).

Вообще, роль красоты – вещь абсолютно универсальная для всех сфер человеческой деятельности. Мы говорим о красивой операции, красивом ходе и т.д. И чем олимпиады хуже? Зачем же так плохо к ним относиться?

[3] Многие выпускники Мехмата МГУ вспоминали о сильных впечатлениях, которые на них произвели музыкальные вечера, организованные А. Н. Колмогоровым и П. С. Александровым. П. С. Александров вспоминал, что Хаусдорф и Брауэр прекрасно играли на фортепиано, Хаусдорф писал пьесы, которые шли в театрах. Г. Я. Перельман хорошо знает оперу. Даже сейчас, в некоторых математических лагерях (например, в ЛШСМ) проходят музыкальные вечера.

1.3.4 Роль эстетического чувства

Коль скоро сила идеи и ее красота идентичны, роль эстетики становится практически значимой. Математик, не сделавший красивых результатов, полноценным математиком не является. Как отмечал Э. Б. Винберг "Очевидными целями школьного курса геометрии являются развитие представлений о геометрии окружающего мира и обучение решению некоторых стандартных задач. Но не менее важно, что этот урс может предоставить прекрасный материал для творчества и способствовать пониманию ткаих духовных ценностей, как истина и красота". Поэтому так важно не губить, но развивать эстетическое чувство. И здесь помогает искусство. Поэтому важна культурная программа.

Есть тактика, а есть стратегия и "надстратегия", называемая иногда "философией". Без этого невозможно решить трудную задачу, где важна архитектура. И для развития стратегического мышления особенно важна эстетика. То же самое относится и к организации олимпиад и сборов. Помимо роли эстетики при решении задач, прежде всего в стратегических вопросах, есть и иной аспект. Кондовое сольфеджио не способно создать энтузиазм. Голые амбиции, связанные с победой как таковой, имеют существенные издержки, но их все же недостаточно. Подлинный энтузиазм возникает, когда человек ощущает ценность того, что он делает. И именно такой энтузиазм позволяет лучше переносить нагрузки, оправдывает трудовые будни, мотивирует изучение техники.

Рассказ о решении крупных научных проблем необходим. Отказ от этого напоминает попытку производить художников, изучая технику рисунка, нанесения красок и проч., но без ознакомления с работами великих мастеров. Что тогда получится? Просто маляр...

Граф Д. А. Толстой (министр народного просвещения) следовал учению о двух ветках образования – утилитарного (реального) и развивающего. К последнему относились математика, древние языки, искусство. Роль эстетизма иллюстрируется следующим обстоятельством. Известно, что лучшие прикладники возникали из чистых математиков (именно на отделение прикладной математики или computer science следует поступать людям, не имеющим особых амбиций имеющим нехватку времени здоровья и т.п. – только тогда прямой утилитаризм оправдан). Покойный Г. Литинский рассказывал о директоре оборонного института. Его спросили – зачем Вы держите математиков? С ними проблемы, да и зачастую бездельники, прямого прока мало. Он сказал – действительно так, но они задают уровень. Известно, что многие крупные бизнесмены и общественные деятели, иногда чиновники имели роман с математикой. Дело не в утилитарной полезности, а в культуре мышления. Зачем же для олимпиад делать исключение? Почему бы их не уважать, раз уж мы ими занимаемся?

Да и задуматься полезно: зачем общество все это содержит?

В свое время за счет математического профессионализма и, как следствие, лучших эстетических критериев подбора задач, в одном областном центре удалось добиться результатов лучше, чем в мегаполисах.

1.3.5 Об энтузиазме

Нет необходимости говорить о важности энтузиазма и позитивных эмоций и его связи с эстетикой. Конечно, случается необходимость производить черновую и неприятную работу, бывают даже необходимы те или иные формы насилия. Но если человек что-то не хочет делать, следует задуматься – почему? Папюс в своей книге, посвященной "магии" говорит о важном принципе – имеется карета, лошадь и извозчик. Извозчик (наше сознание и сознательная воля) может везти карету очень недолго, но он может как-то управлять лошадью, которая и везет карету нашей судьбы.

Чтоб добиться энтузиазма в каком бы то ни было деле (совершенно не важно с кем работать – со школьником, студентом или аспирантом), необходимо следующее.

1. Достойная цель. Победа как таковая – это наркотик, зачастую нужный, но все же недостаточный. Если люди видят, что олимпиада сопряжена с красивыми вещами, это придает смысл. В этой связи полезен рассказ о крупных научных проблемах и как они решаются, и где работают олимпиадные идеи.

2. Тот, кто работает с человеком должен из-себя нечто представлять.

3. Внимание к человеку.

1.3.6 Причины недооценки эстетики

Недооценка эстетики, миф об эффективности узко спортивного подхода достаточно часто встречается в среде учителей. Авторы сталкивались с редактированием статей, написанных учителями для популярных журналов. Наиболее характерные ошибки – непритязательность вкуса и увлечение "сольфеджио" – стремление проиллюстрировать мысль чрезвычайно большим числом примеров. Например, один из очень хороших учителей, когда ему было предложено написать статью о новом методе доказательства неравенств, он пожелал разобрать 50 примеров, не слишком друг от друга отличающихся, некоторых усилий требовало объяснить, что достаточно пяти.

Дело в том, что учителя ограничены в выборе материала, отсюда вынужденная невзыскательность. Довольно мало блестящих задач на квадратный трехчлен, и даже просто хорошие, естественные и содержательные являются большой ценностью. Привередничать не приходиться. То же самое происходит и с узко спортивным тренером.

Кроме того, учитель, как и олимпиадный тренер, застревают на определенном этапе научного роста. Отсюда любовь к строгости (иногда даже до начетничества) и к технике, неприязнь к т.н. "верхоглядству" (после восприятия математики как науке о занимательных головоломках и сюжетов приходит потребность в строгости и в наведении порядка), боязнь "полетов" над материалом. Это также служит одной из причин недооценки эстетики. (Правда, в отличии от олимпиадного тренера, учителю приходиться иметь дело с недостаточно мотивированными учениками, формировать интерес и проч. И в этом отношении он гораздо более развит и, как следствие, лучше убеждается в необходимости эстетики.

1.3.7 Два подхода к олимпиадам

В олимпиадном мире сложились две ценностные ориентации. Они проявляются во всем: в подборе задач, выработке критериев оценок, и – что немаловажно – отражаются на роли и авторитете тех или иных личностей и, как следствие, на кадровых вопросах. Проявляются эти подходы и в организации математических лагерей. В значительной степени люди привержены одному из этих подходов, причем не всегда осознанно. Поэтому автор пытается дать описание, условно говоря, "научного" и "спортивного" стиля олимпиад.

1.3.8 Перерождение в большой спорт

В последнее время в олимпиадном мире усилился и доминирует "спортивный" подход. Я получил публичный упрек от одного олимпиадного деятеля, что для меня "*олимпиада лишь средство обучения математике, а для него – СПОРТИВНОЕ СОРЕВНОВАНИЕ*".

Распространение подобной точки зрения связано с тремя группами причин. Во-первых, с общим спортивным духом нашего времени. Во-вторых, с недостатком действующих математиков в олимпиадном мире и, как следствие, с ухудшением качества кадров. И в-третьих, это следствие логики развития олимпиадного движения без обратных связей, которой надо противостоять. (Иногда в предметах с менее долгой олимпиадной традицией научный уровень жюри бывает выше, поскольку первоначальный импульс в них задают крупные ученые, по той же причине бывает выше научный уровень жюри в странах с более молодой олимпиадной традицией). Ситуация усугубляется влиянием бизнеса, который в ряде случаев извращает творческие конкурсы (не только по математике).

Спортивный подход выражается фразой: "олимпиада – это спорт по решению головоломок". Этот лозунг влечет за собой многое: усиливается тренерство, ужесточаются формальные требования и, соответственно, критерии оценок. Так, если спортсмен переступит черту на 10 см, а прыгнет на 10 метров, ему не зачтут прыжок 9,9 м, его прыжок не зачтут вовсе.

Показательны слова одного из олимпиадных деятелей, сказанные во время обсуждения описки учащегося: "А если тебе зарплату не так подсчитали?" Налицо непонимание цели и смысла олимпиад.

К придумыванию новых задач относятся как к составлению шахматных этюдов и головоломок, только вместо фигур комбинируют объекты из школьной программы и стандартные олимпиадные темы. А в шахматах вопроса "откуда такое расположение фигур" просто не возникает. Комбинировать пытаются всч со всем. Особенно ценится внешняя обертка. Отношение к задачам как к головоломкам ведет к возникновению химер – когда комбинируется несовместимое по своей внутренней природе. Вот типичные примеры такого рода задач:

1. *Можно ли расставить числа от* 1 *до* 100 *в ряд так, чтобы сумма любых трех, идущих подряд, была простым числом?*

2. *Стороны треугольника – простые числа. Может ли его площадь быть целым числом?*

В этих двух задачах простота числа притянута искусственно. Используется только свойство нечетности.

Или еще –

3. *Найдите все целые числа, равные сумме факториалов своих цифр.*

Это мертвая математика.

Примеры отторжения содержательных задач (разных авторов). Речь пойдет о вкусе жюри, а не об аргументации, связанной с известностью или уровнем сложности задач.

Следующие две задачи были сочтены методической комиссией "неестественными".

1. *Поезд ехал один час от пункта A в пункт B , проехав* 60 *км. Доказать, что в какой-то момент его ускорение было не менее* 240 *км/ч*^{2}. (В. М. Тихомиров)

2. *Плоскость покрыта единичными кругами. Докажите, что некоторая точка покрыта не менее трех раз.* (А. Я. Белов)

Вторая задача отражает в простейшей форме фундаментальное понятие *топологической размерности*. Пространство имеет *размерность* n, когда имеются сколь угодно мелкие покрытия без перекрытий по $n + 2$, но нельзя избавиться от перекрытий по $n + 1$. У того, кому она кажется неестественной, скорее всего, плохой вкус и он плохо знает математику.

На одном фестивале была предложена задача по нахождению угла между некоторыми диагоналями правильного додекаэдра (Автор – С. Анисов). Идея решения состояла в рассмотрении вписанного куба. Эта задача была отвергнута как "неолимпиадная". Однако в задачных конкурсах до недавнего времени использовались разного рода стереометрические "монстры". Способный от природы школьник всч же может увидеть куб, вписанный в додекаэдр, а натасканный на "стандартные" олимпиадные темы "спортсмен", скорее всего, не увидит.

С другой стороны, многие задачи, например, на построение инвариантов, могут быть решены только учащимися, хорошо владеющими этой техникой (которая, к сожалению, даже намеками не входит в школьный курс). Здесь возникает проблема "джентльменского набора" идей и методов, без владения которыми "самородок" не достигнет больших успехов на олимпиаде. Получается, что следование вкуса жюри дает преимущество школьников натасканных на олимпиады по сравнению с изначально талантливыми.

Еще пример "неолимпиадной задачи".

Ломаная делит круг на две равные части. Доказать, что она проходит через его центр. (А. К. Ковальджи).

Стиль решения этой задачи непривычен для олимпиадных деятелей. Тут дело вовсе не в трюке. Надо осознать, что значит *две равные части.* Это значит, что *есть движение, переводящее одну часть в другую*. А все типы движений плоскости описаны в теореме Шаля. Далее следует небольшой перебор. (Подробнее – см. "Математическое просвещение", сер. 3, вып. 6, 2002. С. 139–140.)

Или еще пример стереометрической задачи, отторжение которой говорит о дурном вкусе.

Можно ли разбить пространство на усеченные октаэдры?

Разговор о конкретных вариантах олимпиад, плохих и хороших задачах давно назрел. К сожалению, здесь мы имеем возможность только поставить вопрос о его необходимости.

Причины появления задач-химер и отторжения содержательных задач. Почему получили распространение задачи-химеры? И почему спортивный подход приводит к негативному, при прочих равных, отношению к задачам, за которыми стоит внутреннее содержание – т.е. поле идей и сюжетов (т.е. теми, на которых и надо учить математика)?

Дело в том, что поучительная задача чему-то учит. Но тогда и обратно – решение такой задачи непредсказуемым образом зависит от особенностей решателя и его культуры. Если процесс решения задачи оказывает воздействие на культуру решателя, то его результаты, в свою очередь, должны от этой культуры зависеть. Эта зависимость тем менее предсказуема, чем более глубокой оказывается задача. Следовательно, такая задача неудобна в плане оценки ее сложности. Например, нашедшему 100-ю цифру после запятой числа $(\sqrt{5}+2)^{1000}$ гораздо легче показать несуществование рациональных α_i, β_i таких, что $\sum_i(\alpha_i+\sqrt{3}\beta_i)^2 = 2+3\sqrt{3}$. И наоборот, решение последней задачи облегчает первую. Кроме того, доказавший разложимость многочлена с вещественными коэффициентами в произведение многочленов не более чем второй степени имеет преимущество в решении этих задач. Сейчас, правда, идея сопряженности обсуждается на занятиях кружка и для прошедшего эти занятия упомянутые выше задачи суть упражнения. Тем не менее так было не всегда. Есть много идей и связей которые мы пока не понимаем. [4]

Спортивный принцип предполагает стандартизацию. Одна из его основ – использование относительно стандартных приемов решения задач. При решении искусственных задач участники более равны, а самые "равные" должны получать премии.

Большой спорт тяготеет к ограничению поля деятельности и четкой формализации правил. Поэтому не случайна узость тематики задач, отсюда опасность вырождения олимпиад. Кроме того, стиль решения содержательной задачи (за которой стоит целое поле идей и сюжетов) непривычен для нематематика, а следовательно, не соответствует его вкусам.

Разница между содержательным и спортивным стилем олимпиад примерно такая же, как между задачами придумать способ сборки кубика Рубика и соревнованиями на скорость его сборки. Спортивный стиль, "головоломочность" оказывают влияние и на ведение занятий. Внимание смещается с внутренней сущности на формальные манипуляции материалом [11].

Причины распространения формально-спортивного подхода. Помимо уже обсуждавшейся логики организации соревнований в большом спорте есть и другая столь же важная

[4]Мы предполагаем в дальнейшем добавить проиллюстрации.

причина распространения сверхспортивного стиля. Дело в том, что взгляд на математику как на науку о решении занимательных задач и головоломок самый доступный. Более того, он необходим при первоначальном знакомстве с математикой, а следовательно, и в преподавании. Естественно, что этот самый доступный, безусловно, ценный и живой взгляд на математику, при всей его узости, получил распространение. Но при доведении его до крайности возникает сверхспортивный стиль.

Глубина понимания без узости объекта изучения сразу не достигается (с этим связан подростковый экстремизм типа "ничего мне не нужно, кроме геометрии"). Лучше вначале достичь глубины, чем широты. В доступности спортивного стиля есть и позитивная сторона. Олимпиадный тренер даже спортивного толка может много сделать для развития образования в своем регионе.

Талантливый школьный учитель или местный деятель образования (а то обстоятельство, что он смог возвыситься над рутиной, говорит о многом), совершив усилие, иногда даже сверхусилие, входит в олимпиадный мир. Но чтобы ему понять, что мотивировки задач принципиально важны, требуется еще одно усилие, которое редко когда совершается. Помимо всего прочего, человек горд собой – у него уже есть результаты, а они зачастую ослепляют (вплоть до снобизма).

Олимпиадный мир – это только ветка, а не дерево с собственными корнями, поэтому терять связь с научным миром никак нельзя. Каковы бы ни были олимпиадные деятели, они светятся хотя бы отраженным светом. Нынешняя эволюция олимпиад предвещает мало хорошего. Если возобладает чисто спортивный подход, то математическая олимпиада, очевидно, не сможет конкурировать с иными соревнованиями – ни по зрелищности, ни по популярности. Если олимпиадный деятель может отстранить ученого от участия в подготовке олимпиады, то, наверное, и чиновнику можно заменить олимпиадного деятеля? Подробнее разного рода социальные опасности (а также влияние человеческого фактора) изложены в работе [11].

Имеются опасности, связанные с влиянием подготовки к международной олимпиады на стандарты национальных олимпиад, что приводит к еще большему сокращению тематики. Например, на международной олимпиаде нет стереометрии. Тогда зачем ее учить? На международной олимпиаде вариант составляется голосованием team-leader'-ов. При таком голосовании они преследуют отнюдь не только интересы научного содержания. Это самым плачевным образом отражается на качестве варианта. (Хотя на международной олимпиаде бывают красивые задачи.)

Манипуляторство при проведении занятий. Разница между содержательным и спортивным стилем олимпиад примерно такая же, как между задачами придумать способ сборки кубика Рубика и соревнованиями на скорость его сборки. Спортивный стиль, "головоломочность" оказывают влияние и на ведение занятий. Внимание смещается с внутренней сущности на формальные манипуляции материалом.

Применительно к преподаванию это приводит не только к упору на натаскивание к олимпиадам. Парадоксальным образом зачастую наблюдается любовь тренеров к ученым словам и манипулирование ими. (Примеры курьезов такого рода – мини-курс на тему: "три определения комплексного числа с доказательством их равносильности"[5], абстрактно изучаются "n-арные операции", обсуждаются "результаты" типа такого: группа S_3 вкладывается в группу автоморфизмов свободной группы с тремя образующими и т.д. и т.п.)

[5] Вполне осмысленно анализировать разные определения выпуклости фигур, поскольку это дается сравнительно легко и помогает решать задачи. А в "игре" с комплексными числами, с одной стороны, имеется стремление подражать "большой науке", а с другой – мало содержания.

На наш взгляд, важна связь учителя с живым источником, которая сама по себе служит опорой и дисциплинирующим началом, что позволяет быть менее формальным. Жесткость и формальность в преподавании связана и с узостью кругозора (чем уже, тем жестче). Отсутствие или слабость живой связи с наукой приводит к возрастанию роли внешней обертки, а сами математические понятия становятся чем-то вроде заклинаний.

1.3.9 Подход к олимпиадам, имеющий источником науку

Девиз другой олимпиадной идеологии: *преподавание и олимпиады должны отражать науку*. Этой идеологии следовали всесоюзные олимпиады и старые олимпиады во многих странах (с единственной оговоркой – изначально олимпиады были близки по духу к вступительным экзаменам).

Впоследствии выяснилось, что олимпиада – это, в том числе, полигон для отработки новых тем и сюжетов (см. задачник "Кванта", особенно в 70-е – 80-е годы). В современных олимпиадах эта идеология присутствует не в чистом виде (в наиболее чистом виде – в Турнире городов, особенно на его летних конференциях [4], и в Московской олимпиаде, при всех их недостатках).

Этот девиз о связи с математикой имеет конкретное преломление.

Прежде всего, химерам в олимпиадах отказано в праве на существование. Ведь постановка задачи столь же важна, как и умение ее решать. Сила математика, как уже говорилось, во многом зависит от его вкуса. Совершенно необходимо иметь чутье на естественность. Без этого человек находится вне науки. Неестественная трудная задача на олимпиаде портит вкус и наносит огромный вред участникам.

Хорошая олимпиадная задача получается путем оформления идей и сюжетов из науки. Реже возникает новый сюжет в элементарной математике.

К спорту – отношение утилитарное, как к средству заставить подростка выложиться, достичь глубины, изучить технику. Приоритет соображений, уважающих содержание, над спортивными, когда это возможно.

Математик, занимающийся большой проблемой, ищет связанные с ней задачи, где предполагаемые идеи решения работают в более простой ситуации. Невозможно также придумать несколько идей сразу – нужны промежуточные этапы, поэтому ценятся *продвижения*. Под наличием решения, как правило, понимается наличие "каркаса", –е основных идей. Такой подход в миниатюре можно переносить на олимпиадное творчество. Академические ценности по своей природе неформальны, но имеют огромное значение для воспитания будущих ученых.

К научному стилю, так или иначе, тяготеют практически все профессиональные математики, занимавшиеся олимпиадами.

1.3.10 Заключение

Разумеется, без определенной преподавательской и некоторой олимпиадной квалификации одной научной квалификации для составителя варианта недостаточно. Действительно, существует определенный набор вопросов, существенных при подготовке олимпиады (наличие утешительной задачи, балансировка варианта по сложности, наличие разных тем в варианте олимпиады). Но грамотному математику, интересующемуся олимпиадами (а на олимпиадах воспиталось много математиков), всему этому научиться несложно.

В учебном процессе по некоторым предметам ставится "зачет", выражающий только наличие определенных умений, при этом неважно, насколько эти умения доведены до совершенства, а по некоторым предметам – "экзамен с оценкой". За соблюдение формата варианта жюри можно присудить только "зачет" или "незачет". История же ставит дифференцированную оценку только за научное содержание. У создателей олимпиадного движения не было стремления ни к тонкой балансировке варианта, ни к близости распределения решивших задачи с желаемому (только чтобы оно было в разумных рамках). Эти стремления появились и стали приводить к засилью искусственных задач, которые (см. выше) проще придумывать и удобнее оценивать. Такого рода "профессионализация" есть паразитическая часть олимпиадной культуры. Она позволяет рационализировать отторжение хороших задач и создает авторитет некоторым олимпиадным деятелям, ограничивает круг лиц, занимающихся олимпиадами.

Когда за олимпиаду отвечал математик приемлемого уровня, то даже при отсутствии олимпиадного опыта научное содержание олимпиад выправлялось. Что касается соблюдения организационных принципов и форматов, оно быстро приходило в норму. Так было, в частности, с Всесоюзными и Московскими городскими олимпиадами в середине 80-х годов. Роль сильного математика может быть нетривиальной. Бывает очень непросто понять, как наши сильные качества или слабости отражаются на нашем окружении. О силе руководителя прежде всего говорит его окружение.

В создавшихся условиях особенно важны традиции, заложенные создателями олимпиадного движения – великими учеными. В частности, они способны затруднить, а иногда и остановить вредное реформаторство. То обстоятельство, что у истоков олимпиад стояли великие люди, имеет важное значение и для привлечения общественного внимания и ресурсов (включая финансовые). Но, в то же время, это и ответственность – по меньшей мере, моральная. О гласности в отношении уровня жюри и достижений его членов должны заботиться организаторы турниров.[6]

Поднять научный уровень олимпиад и одновременно спортивные достижения проще, чем кажется. Не так сложно научиться технике составления вариантов, да и среди действующих математиков есть достаточное число людей, прошедших олимпиадную школу. Организация постоянно действующего семинара по олимпиадным задачам в конце 80-х – начале 90-х годов на мехмате привела к появлению новых олимпиадных деятелей и достаточного запаса новых олимпиадных задач. Важно привлекать действующих математиков, причем разнообразных специальностей, чтобы были покрыты основные разделы науки. Тех, кого можно привлечь к олимпиадному движению, довольно много, как в столицах, так и на периферии.

Обучение живой математике даже с точки зрения спортивных достижений гораздо эффективнее, чем натаскивание на мертвые задачи. Этому есть примеры. Сила приводит к успехам, но проявляется она в обличии красоты. Необходимо начать работу по осмыслению накопленного опыта, и это осмысление принесет плоды. Призываем всех к дальнейшему обсуждению.

1.4 Философско-методические комментарии. А. Скопенков

По моему мнению, именно с *новых идей*, изложенных на уже имеющемся языке, а не с *введения нового языка*, полезно *начинать* изучение любой теории. [7] Как правило, такие идеи наиболее ярко выражаются доказательствами, подобными приведенным здесь.

[6]Некоторое представление как о научных, так и о популярных статьях, можно получить на платных сайтах `http://www.zentralblatt-math.org`,
`http://www.ams.org/mathscinet`, и бесплатных `http://scholar.google.com/`,
`http://kvant.mirror1.mccme.ru/`, `http://www.turgor.ru/lktg/index.php`,
`http://www.mathnet.ru`).

[7]Это отредактированная версия части заметки [KS], не включенной редакцией в опубликованную версию.

Мы стараемся свести к минимуму число понятий, откладывая определения до момента, когда они напрашиваются сами собой, и избегая задач на понимание и применение формальных определений (типа "является ли множество целых чисел группой по сложению?"). [Sh]

При изложении материала нужно ориентироваться на объекты, которые основательнее всего укореняются в человеческой памяти. Это — отнюдь не системы аксиом и не логические приемы в доказательстве теорем. Изящное решение красивой задачи, формулировка которой ясна и доступна, имеет больше шансов удержаться в памяти студента, нежели абстрактная теория. Скажем больше, именно по такому решению, при наличии некоторой математической культуры, студент впоследствии сможет восстановить теоретический материал. Обратное же, как показывает опыт, практически невозможно. [Ко, предисловие]

Одним из принципов преподавания, которого я стараюсь придерживаться, является 'путь познания должен повторять путь развития'. [8]

Такой стиль изложения не только делает материал более доступным, но позволяет сильным студентам (для которых доступно даже абстрактное изложение) приобрести математический вкус и стиль с тем, чтобы

(1) разумно выбирать проблемы для исследования и их мотивировки. [9]

(2) ясно излагать собственные открытия, не скрывая ошибки или известности полученного результата за чрезмерным формализмом. [10]

Мода на искусственно формализованное изложение [11] привела к следующему парадоксу. По данному *известному понятию* высшей математики зачастую непросто восстановить *конкретный красивый результат*, для которого это понятие действительно необходимо (и при получении которого это понятие возникло).

Доказательство с использованием некоторого нового термина имеют свои преимущества: оно подготавливает читателя к доказательству тех теорем, которые уже трудно или невозможно доказать без этого термина. [12] Однако такие доказательства, как правило, не должны быть *первыми* доказательствами данного результата (легко себе представить результат *первого* знакомства с теоремой Пифагора на основе понятий векторного пространства и скалярного умножения). Кроме того, при приведении 'терминологического' доказательства полезно

[8]Впрочем, это не всегда применимо. Так, изучение геометрии Лобачевского вовсе не обязательно начинать с попыток доказать Пятый Постулат. Геометрия Лобачевского для нас сейчас важна, в первую очередь, ее приложениями в ТФКП, теории чисел, топологии, теории групп, алгебраической геометрии, космологии и т.д., а вовсе не тем, что она демонстрирует независимость Пятого Постулата от остальных аксиом Евклида. С этой точки зрения более плодотворно ее построение не на основе аксиом Евклида-Гильберта, а на основе понятия группы преобразований (Клейн) или римановой метрики (Риман). Аналогично, изучение теории Галуа вовсе не обязательно начинать с задачи о решении алгебраического уравнения в радикалах или квадратных радикалах. С современной точки зрения теория Галуа есть теория алгебраических расширений полей, составляющая неотъемлемую часть алгебры и имеющая приложения и аналоги в других разделах математики (алгебраическая геометрия, теория накрытий, теория инвариантов), а решение алгебраических уравнений в радикалах — это маргинальная задача. (Э. Б. Винберг).

[9]Математик, понимающий, что теория Галуа мотивируется более важными проблемами, чем построимость правильных многоугольников и разрешимость алгебраических уравнений в радикалах, вряд ли станет мотивировать созданную им теорию приложениями, которые можно получить и без его теории.

[10]К сожалению, такое — обычно непреднамеренное — сокрытие ошибки часто происходит с математиками, воспитанными на чрезмерно формальных курсах. Происходило и с автором этих строк; к счастью, все мои серьезные ошибки исправлялись *перед* публикациями.

[11]Видимо, общепринятый термин 'бурбакизация' не очень удачен ввиду 'масштаба и влияния деятельности Бурбаки, независимо от оценки пользы и вреда разных ее аспектов' (А. Шень).

[12]Например, векторное доказательство теоремы Пифагора уже является достаточным основанием для введения понятий векторного пространства и скалярного умножения, хотя эти понятия и не являются необходимыми для доказательства упомянутой теоремы. (Э. Б. Винберг.)

оговорить его мотивированность не доказываемым результатом, а обучением полезному новому методу (ср. с (1) выше).

Приведенная выше точка зрения разделяется многими математиками (а некоторыми — нет); я унаследовал ее от Ю. П. Соловьева.

Приводимые порой в качестве *основных* приложений теории Галуа теоремы Гаусса и о неразрешимости уравнений в радикалах неубедительны для мотивировки этой теории (так же, как приложение к решению квадратных уравнений неубедительно для мотивировки общей теории разрешимости уравнений произвольной степени в радикалах). Действительно, эти теоремы имеют элементарное доказательство, не использующее 'групп Галуа'. В терминах теории Галуа формулируется общий критерий разрешимости алгебраического уравнения в радикалах. Но этот критерий не дает настоящего решения проблемы разрешимости, а лишь сводит ее к трудной задаче вычисления группы Галуа уравнения. (То, что никакая *другая теория* не дает легкого для применений ответа, не позволяет утверждать, что *теория Галуа* дает такой ответ.) Но, конечно, формулировка общего критерия в адекватных проблеме терминах может иметь важное философское значение.

Однако теория Галуа выходит далеко за рамки проблемы разрешимости уравнений в радикалах. Ее популяризации послужила бы дальнейшая публикация интересных теорем, формулируемых без понятий теории Галуа, но при попытках доказать которые она естественно возникает. Примеры таких теорем мне сообщили А.Я. Белов, С.М. Львовский и Г.Р. Челноков (к сожалению, в доступной мне начальной учебной литературе по теории Галуа мне не удалось найти такие теоремы, формулировка которых не была бы скрыта под толщей обозначений и терминов).

Список литературы

[A] В.Б. Алексеев, Теорема Абеля. М: Наука, 1976.

[Ko] В.А. Колосов, Теоремы и задачи алгебры, теории чисел и комбинаторики. М: Гелиос, 2001.

[KS] П. Козлов и А. Скопенков, В поисках утраченной алгебры: в направлении Гаусса (подборка задач), Мат. Просвещение, 12 (2008), 127–144, http://arxiv.org/abs/0804.4357 (v1)

[Sh] Задачи по математике под редакцией А. Х. Шеня. М.: МЦНМО, 2000.

[1] Бончковский Р. Н. *Вторая Московская математическая олимпиада* //., 1936.. 2.. 275 − −278.(.`www.mathnet.ru/rm8891`.)

[2] Гальперин Г. А., Толпыго А. К. *Московские математические олимпиады*. М.: Просвещение, 1986.

(См. также `http://www.ethology.ru/library/?id=321`)

[3] Константинов Н. Н. *Турнир Городов и Математическая олимпиада* //.. 3, .1, 1997.. 164−−174.

[4] Константинов Н. Н., Френкин Б. Р. *Летние конференции Турнира городов*: *Избранные материалы* (*Вып.* 1). М.: МЦНМО, 2009.

[5] Леман А. А. *Сборник задач московских математических олимпиад*. М.: Просвещение, 1965.

[6] Пойа Д. *Как решать задачу*. М.: Учпедгиз, 1961.

[7] Пойа Д. *Математика и правдоподобные рассуждения*. М.: Наука, 1975.

[8] Пойа Д. *Математическое открытие*. М.: Наука, 1976.

[9] Скопенков А. Б. *Олимпиады и математика* //.. 3, . 10, 2006.. 57 − −63.

[10] Нетающий Айсберг. http://www.svoboda.org/content/article/27171978.html

[11] Белов А. Я. *Олимпиады: дверь в математику или спорт?* Матем. просвещение, 15 (2011), 182Ц-186

[12] Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К., *Занятия по математике – листки и диалог.*, Математическое Просвещение, 3 серия: 19 (2015), 206–235

[13] Н. Х. Розов, *Традиции математической олимпиады в Грузии.*

[14] Федоров Р. М., Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К., Ященко И. В. *Московские математические олимпиады.* 1993–2005. М: МЦНМО, 2006.

[1] С. А. Генкин, И. В. Итенберг и Д. В. Фомин, Ленинградские математические кружки, Киров, 1994.

[2] Д. Судзуки, Основы дзэн-буддизма. Наука дзэн — ум дзэн. Киев, 1992.

[3] Платон, Федон, в кн.: Федон, Пир, Федр, Парменид. Москва, Мысль, 1999.

[4] А. Я. Канель, А. К. Ковальджи, ‘Как решают нестандартные задачи’.

[5] Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов и И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, Москва, Физматлит, 2001.