

ЧИСЛА КАТАЛАНА И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

Г.Б.Шабат

Приводимые ниже задачи и необходимые для их решений понятия сильно различаются по уровням трудности, стандартности и формальности.

А. Определения чисел Каталана.

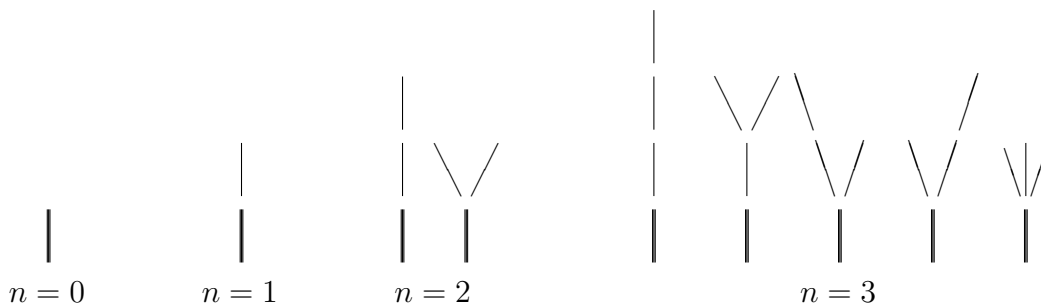
Мы будем заниматься так называемыми *числами Каталана*, которые обозначаются $c_0, c_1, c_2, c_3 \dots$. Вот первые значения чисел Каталана:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
c_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796	58786	208012	742900

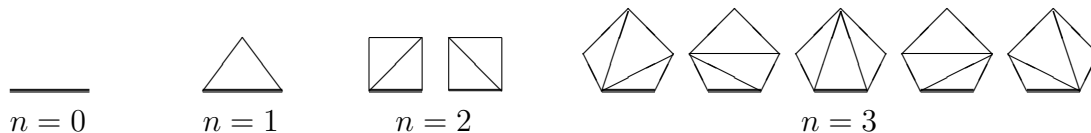
Имеется огромное количество *разных* определений чисел Каталана. Вот семь из них.

1. *Количество плоских корневых деревьев с n рёбрами.*

Точного определения мы приводить не будем. Вот полные списки при $n \geq 3$:

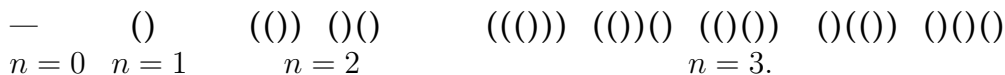


2. *Количество триангуляций $(n+2)$ -угольника с выделенной стороной.*
Точного определения мы приводить не будем. Вот полные списки при $n \geq 3$:



(при $n = 0$ приходится иметь дело с *пустой* триангуляцией *двуугольника*).

3. Количество правильных скобочных слов с n парами скобок. Представим себе все правильно записанные алгебраические выражения, в которых скобки используются так, как учат в школе. Потом мысленно сотрём все знаки, кроме скобок. То, что останется, и называется скобочными словами. Скобки окажутся разбитыми на пары: каждой открывающейся скобке соответствует закрывающаяся. При $n = 0$ нам придётся работать с *пустым* словом, которое будет обозначаться прочерком —. Полные списки:



В следующих трёх определениях все числа Каталана определяют-
ся одновременно.

Числа Каталана $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ - ЭТО

4. Числа, определяемые равенством

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$$

5. Числа, определяемые соотношениями

$$c_0 = 1,$$

$$c_{n+1} = c_0c_n + c_1c_{n-1} + \cdots + c_{n-1}c_1 + c_nc_0$$

при $n = 1, 2, 3, \dots$

6. Числа, определяемые соотношениями

$$c_0 = 1,$$
$$c_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2}$$

при $n = 1, 2, 3, \dots$

В последнем определении даётся просто формула для чисел Каталана.

7. Числа Каталана определяются равенством

$$c_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}.$$

Б. Задачи к определениям.

Задача 1. Нарисуйте 10 разных плоских корневых 4-рёберных деревьев.

Задача 2. Нарисуйте 10 разных триангуляций 6-угольника.

Задача 3. Сформулируйте точное правило: когда последовательность из открывающихся и закрывающихся скобок - правильное скобочное слово?

Задача 4. Проверьте соотношение из определения 5 для $n = 1, \dots, 6$.

В. Задачи о равносильности определений.

Задача 5. Пусть плоское дерево нарисовано на школьной доске, и его против часовой стрелки, начиная с корня, *обползает* учёная муха. Около доски стоит школьник с мелом и, глядя на движущуюся муху, пишет последовательность из открывающихся и закрывающихся скобок: когда муха ползёт вдоль ребра первый раз, школьник ставит открывающуюся скобку, а когда второй раз - закрывающуюся. Докажите, что, когда муха доползёт обратно до корня, школьник напишет правильное скобочное

слово.

Дальше мы будем говорить, что школьник *описал* (скобочным словом) дерево, обползённое мухой.

Задача 6. Разбейтесь на пары. Нарисуйте какое попало плоское корневое 16-рёберное дерево, подпишитесь под ним и передайте своему напарнику или своей напарнице. Пусть он или она опишет ваше дерево на другом листе бумаге, отметив под описанием вашу фамилию.

Задача 7. Перемешайте между собой описания деревьев так, чтобы ни один из вас не рисовал и не описывал то дерево, описание которого вам досталось. Восстановите дерево по описанию и верните его автору или авторше дерева - пусть сравнивает.

Задача 8. Придумайте неформальный набросок доказательства равносильности $1 \leftrightarrow 3$.

Пусть U и V - скобочные слова. Назовём их *сцеплением* новое скобочное слово

$$U \# V := (U)V.$$

Задача 9. Коммутативна ли операция сцепления, то есть для всяких ли U и V выполняется $U \# V = V \# U$?

Задача 10. Придайте точный смысл утверждению

Всякое непустое скобочное слово однозначно расцепляется

и докажите его.

Задача 11. Докажите равносильность $2 \leftrightarrow 5$.

Указание. Предложите процедуру *сцепления* двух триангуляций. Затем сформулируйте и докажите утверждение об *однозначном расцеплении*.

Задача 12. Докажите равносильность $3 \leftrightarrow 5$.

Вспомогательное задание. Составив *таблицу сцепления* скобочных слов, продумайте алгоритм порождения (без повторений) скобочных слов.

Задача 13. Докажите равносильность $4 \leftrightarrow 5$.

Задача 14. Докажите равносильность $2 \leftrightarrow 6$.

Указание. Составьте таблицы триангуляций с отмеченной *невыведенной* *стороной* и с отмеченным *направленным ребром*

Задача 15. Докажите равносильность $6 \leftrightarrow 7$.

В. Задачи о свойствах чисел Каталана.

Задача 16. Из каких определений 1 - 7 и насколько легко вытекает, что все числа Каталана натуральны?

Задача 17. Изучите чётность чисел Каталана.

Задача 18. Изучите рост чисел Каталана. Сколько знаков в числах c_{100} , c_{2007} ?

Г. Задачи об обобщениях чисел Каталана.

Задача 19. Из плоскости вырезается $2n$ -угольник, и его стороны всевозможными способами разбиваются на пары; затем склеиваются так, чтобы из полученной поверхности нельзя было вырезать лист Мёбиуса. Число Харера-Цагира $\epsilon_{g,n}$ по определению равно количеству таких склеек рода g . Составьте таблицу чисел Харера-Цагира с небольшими номерами. Выясните связь между числами Каталана и числами Харера-Цагира.

Задача 20. Предложите свои обобщения чисел Каталана.