

Занятие 1. Комбинаторная геометрия

А.М. Райгородский

Определение 1. Хроматическим числом пространства \mathbb{R}^n называется минимальное число $\chi(\mathbb{R}^n)$ цветов, в которые можно так раскрасить все точки пространства, чтобы между одноцветными точками не было расстояния 1.

Определение 2. Диаметром множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется величина $\text{diam } \Omega = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, где через $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ обозначено стандартное евклидово расстояние, а "sup" - это "супремум" или точная верхняя грань. Поскольку в дальнейшем речь пойдет о шарах и конечных множествах, можно для простоты представлять себе обычный максимум.

Определение 3. Числом Борсука для ограниченного тела $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется величина $f(\Omega)$, равная минимальному количеству частей меньшего диаметра, на которые может быть разбито Ω . Через $f(n)$ обозначается $\max_{\Omega} f(\Omega)$.

ЗАДАЧИ

1. Дано множество точек $\mathcal{A} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{R}^2$. Пусть $d = \text{diam } \mathcal{A}$. Докажите, что $|\{(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) : |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| = d\}| \leq n$.
2. Выведите из задачи 1, что $f(\mathcal{A}) \leq 3$.
3. Пусть B - трехмерный шар. Докажите, что $f(B) \leq 4$. Какие диаметры будут у частей? Сделайте то же самое в n -мерном случае с заменой четырех на $n + 1$.
4. Чему равно $\chi(\mathbb{R})$?
5. Докажите, что $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$.
6. Докажите, что $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$.
7. Конечны ли числа $f(n)$ и $\chi(\mathbb{R}^n)$? Если да, то как они оцениваются сверху?
8. Докажите, что $f(n) \geq n + 1$, а $\chi(\mathbb{R}^n) \geq n + 2$ при $n \geq 2$.
9. Рассмотрим

$$V = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \dots + x_n = 3\}.$$

Пусть $Q = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s\} \subset V$ таково, что $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \neq 1$ для любых i и j . Здесь $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = x_i^1 x_j^1 + \dots + x_i^n x_j^n$ - скалярное произведение векторов $\mathbf{x}_\nu = (x_\nu^1, \dots, x_\nu^n)$, $\nu \in \{i, j\}$. Докажите как можно лучшую верхнюю оценку на мощность Q .

10*. Рассмотрим

$$V = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \dots + x_n = 5\}.$$

Пусть $Q = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s\} \subset V$ таково, что $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \neq 2$ для любых i и j . Докажите как можно лучшую верхнюю оценку на мощность Q .

11. Пользуясь результатом задачи 9, докажите, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geq cn^2$ с некоторым $c > 0$.
- 12*. Пользуясь результатом задачи 10, докажите, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geq cn^3$ с некоторым $c > 0$.
- 13*. Как много можно выбрать попарно пересекающихся k -сочетаний из $\{1, \dots, n\}$?
- 14*. Пусть множество $\mathcal{A} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{R}^2$ таково, что $\text{diam } \mathcal{A} = 1$. Существует ли такое \mathcal{A} , что при любой раскраске его элементов в три цвета, найдется пара одноцветных элементов на расстоянии 1 и что в то же время никакие три вершины в \mathcal{A} не образуют равносторонних треугольников с длиной стороны 1?