Гомотетия.

П.А. Кожевников

Порция 1: построения и ГМТ.

1.1. Точка A фиксирована, а точка B движется по фиксированной прямой l. Найдите ГМТ середин отрезков AB.

1.2. Точки A и B фиксированы, а точка C движется по фиксированной окружности ω. Найдите ГМТ точек пересечения медиан треугольников ABC.

1.3. Дана точка A, лежащая вне окружности ω. Постройте прямую, проходящую через A и пересекающую ω в точках B и C так, что $AB = BC$. (Сколько решений может быть у задачи?)

1.4. Постройте окружность, вписанную в данный угол и проходящую через данную точку внутри этого угла. (Сколько решений может быть у задачи?)

Порция 2: гомотетичные треугольники.

Для произвольного треугольника ABC примем обозначения: H — ортоцентр, O — центр описанной окружности, I — центр вписанной окружности, G — точка пересечения медиан.

2.1. а) Докажите (в который раз!), что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что для произвольного треугольника ABC точки H, O и G лежат на одной прямой (*прямая Эйлера*), причем $HG/OG = 2$.

2.2. Пусть A', B', C' — середины соответственно дуг BC, CA, AB описанной окружности треугольника ABC. Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC, CA, AB соответственно в точках A_1, B_1, C_1.

а) Докажите, что прямые $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что ортоцентр треугольника $A'B'C'$ совпадает с I.

в) Докажите, что прямая OI проходит через ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$.

Порция 3: гомотетичные окружности.

3.1. Окружность ω' касается окружности ω внутренним образом в точке P и хорды AB окружности ω в точке Q. Докажите, что прямая PQ проходит через середину дуги AB.

3.2. Окружности ω_1 и ω_2 вписаны в углы A и C параллелограмма $ABCD$ и касаются друг друга внешним образом в точке T. Докажите, что T лежит на AC.

3.3. Окружности ω_1 и ω_2 касаются прямой l соответственно в точках A и B, и окружности ω внешним образом соответственно в точках P и Q. Докажите, что точка пересечения прямых AP и BQ лежит на ω.

3.4. Внешние касательные к окружностям ω_1 и ω_2 пересекаются в точке O. Точки $A, B \in \omega_1$ и $C, D \in \omega_2$ таковы, что прямые AC и BD проходят через O, а отрезки AC и BD находятся вне окружностей ω_1 и ω_2. Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

3.5. Докажите, что прямая, проходящая через середину стороны BC и центр вписанной окружности треугольника ABC, пересекает высоту AD в такой точке P, что отрезок AP равен радиусу вписанной окружности.

Указания и комментарии.

Порция 1.

1.1. Искомое ГМТ — прямая, являющаяся образом l при гомотетии с центром A и коэффициентом $1/2$.

1.2. Искомое ГМТ — окружность, являющаяся образом ω при гомотетии с центром в середине AB и коэффициентом $1/3$ (за вычетом точек прямой AB).

1.3. Точка B лежит на окружности ω', гомотетичной ω с центром A и коэффициентом $1/2$. В зависимости от числа точек пересечения ω и ω' существует 0,1 или 2 искомых прямых.

1.4. Постройте сначала картинку, гомотетичную искомой.

Порция 2.

Если треугольники ABC и $A'B'C'$ имеют параллельные соответствующие стороны, то они либо гомотетичны, либо совмещаются параллельным переносом. В первом случае все прямые XX', где X и X' — соответствующие точки треугольников, проходят через центр гомотетии. (Докажите приведенное утверждение!)

Это утверждение бывает полезно при доказательстве факта пересечения прямых в одной точке или факта принадлежности точек одной прямой.

2.1. Треугольник с вершинами в серединах сторон треугольника ABC гомотетичен ему с коэффициентом $-1/2$.

2.2. Стороны треугольника $A'B'C'$ перпендикулярны биссектрисам AA', BB', CC', и следовательно, параллельны сторонам треугольника $A_1B_1C_1$. При гомотетии, переводящей $\triangle A'B'C'$ в $\triangle A_1B_1C_1$, O переходит в I, а I — в ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$.

Порция 3.

3.1. При гомотетии с центром P, переводящей ω' в ω, AB перейдет в касательную к ω, проходящую через середину дуги AB.

3.2. Используйте гомотетию с центром T, переводящую ω_1 в ω_2.

3.3. Прямые AP и BQ проходят через точку на ω, касательная в которой параллельна AB.

3.4. Пусть прямые AC и BD пересекают ω_1 второй раз в точках C' и D'. Из рассмотрения гомотетии с центром O, переводящей ω_1 в ω_2, следует параллельность $CD \parallel C'D'$.

3.5. Рассмотрите гомотетию с центром A, переводящую вписанную окружность во вневписанную.