Принцип включений и исключений. Лютня 31-1.
Д.Пермяков

1. a) Сколько способов переставить числа от 1 до n чтобы ровно одно из чисел 1, 2 и 3 оказалось на своем месте?

   b) Сколько способов переставить числа от 1 до n чтобы каждое из чисел 1, 2 и 3 оказалось не на своем месте?

   c) Сколько способов переставить числа от 1 до n чтобы каждое из чисел 1, 2, 3 и 4 оказалось не на своем месте?

2. a) Найдите сумму всех 6-значных чисел, получаемых при всех перестановках цифр 4, 5, 5, 6, 6, 6.

   b) Найдите сумму всех 10-значных чисел, получаемых при всех перестановках цифр 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7.

3. a) Дано множество A и его подмножества A_1, A_2, A_3. Докажите, что количество элементов в A, не принадлежащих ни одному из A_i равняется $|A| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$. Здесь через $|A_i|$ обозначается количество элементов в $|A_i|$.

   b) Дано множество A и его подмножества A_1, A_2, A_3, A_4. Обозначим через S_k сумму $\sum\limits_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq 4} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$. Докажите, что количество элементов в A, не принадлежащих ни одному из A_i равняется $|A| - S_1 + S_2 - S_3 + S_4$.

   c) В условиях пункта (b) докажите, что количество элементов, принадлежащих ровно одному из множеств A_i равняется $C_4^1 S_1 - C_4^2 S_2 + C_4^3 S_3 - C_4^4 S_4$.

4. a) Тому Сойеру сказали покрасить забор из 8 досок в белый цвет. В силу своей лени, он покрасит не более 3 досок. Сколько у него способов это сделать?

   В хорошем настроении он может покрасить даже не более 5 досок. Сколько у него способов?

   А за обещанный десерт он может покрасить любое количество досок. Сколько у него способов?

   b) Докажите формулу $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

5. Докажите, что в любом непустом множестве количество подмножеств из четного числа элементов равно количеству подмножеств из нечетного числа элементов. Другими словами, верна формула $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n$.

6. **Принцип включений и исключений.** Пусть имеется множество из N предметов и n его подмножеств $A_1, \ldots, A_n$. Обозначим через $N_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ число предметов в множестве $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$. Пусть $S_k = \sum\limits_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} N_{i_1, \ldots, i_k}$ где $1 \leq k \leq n$; $S_0 = N$. Пусть $N_{=r}$ – число элементов, принадлежащих ровно r подмножествам A_i. Тогда справедливы следующие формулы:

$$a) \quad N_{=0} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k,$$

$$b) \quad N_{=r} = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} C_k^r S_k.$$

   Замечание. Если число $N_{i_1, \ldots, i_k}$ зависит только от k и не зависит от набора индексов, то $S_k = C_n^k N_{1, \ldots, k}$.

7. По кругу стоят n предметов. Докажите, что число способов выбрать k из них, чтобы никакие два выбранных не стояли рядом, равняется $\frac{n}{n-k} C_{n-k}^k$.

8. Используя предыдущую задачу, найдите число способов рассадить n пар враждующих рыцарей за круглый стол с нумерованными местами, чтобы никакие два враждующих рыцаря не сидели рядом.