

Поворотная гомотетия и окружности.
Семейства вписанных и описанных треугольников.
П. Кожевников, Н. Николов,

1. По двум окружностям, пересекающимся в точках P и Q , одновременно начали движение из точки P по часовой стрелке с равными угловыми скоростями две улитки A и B .
 - а) Докажите, что прямая AB все время проходит через Q .
 - б) Докажите, что треугольники PAB подобны друг другу и треугольнику PO_1O_2 , где O_1 и O_2 — центры окружностей.
 - в) Найдите ГМТ (траекторию движения) середин отрезков AB ; центров вписанных окружностей треугольников PAB ; любых соответственных точек подобных треугольников PAB .
2. а) По трем окружностям, имеющим общую точку O и попарные точки пересечения P , Q и R , одновременно начали движение из точки O по часовой стрелке с равными угловыми скоростями три улитки A , B и C . Докажите, что: все треугольники ABC подобны между собой и треугольнику $O_1O_2O_3$, где O_1 , O_2 и O_3 — центры окружностей; O соответственная точка всех треугольников ABC ; стороны треугольника ABC содержат точки P , Q , R (т. е. треугольник ABC описан вокруг треугольника PQR , а треугольник PQR вписан в треугольник ABC).
б) Вокруг фиксированного треугольника PQR описываются всевозможные треугольники ABC с фиксированными углами $\angle(CA, AB) = \alpha$, $\angle(AB, BC) = \beta$, $\angle(BC, CA) = \gamma$. Найдите ГМТ соответственных точек треугольников ABC . Среди всех треугольников ABC найдите треугольник наибольшей площади.
3. В фиксированный треугольник ABC вписываются всевозможные треугольники PQR с фиксированными углами $\angle(RP, PQ) = \alpha$, $\angle(PQ, QR) = \beta$, $\angle(QR, RP) = \gamma$. Найдите ГМТ соответственных точек треугольников PQR (в частности докажите, что существует фиксированная соответственная точка для всех треугольников PQR). Среди всех треугольников PQR найдите треугольник наименьшей площади.
4. В треугольник ABC вписан подобный ему треугольник PQR ($P \in BC$, $Q \in CA$, $R \in AB$).
 - а) Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC совпадает с ортоцентром треугольника PQR .
 - б) Найдите максимальное значение выражения $\frac{S_{ABC}}{S_{PQR}}$.
 - в) Докажите, что центр описанной окружности треугольника PQR равноудален от центра описанной окружности и ортоцентра треугольника ABC .
5. Точки, ползущие по прямой, польская задача с межнара-2005 и точка Микеля...
Литература: статья Кванта 1998 года...