В. Протасов (МГУ)

Элементы геометрии треугольника

Менделеево, 3 ноября, 2007.

Задача 1. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$;
а) докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABC, BCD, CDA, DAB являются вершинами прямоугольника.

б) докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей треугольников ABC и CDA равна сумме радиусов вписанных окружностей треугольников BCD, DAB.

Задача 2. Постройте три равные окружности, пересекающиеся в одной точке внутри данного треугольника, каждая из которых касается двух сторон треугольника.

Пусть x – радиус этих окружностей. Докажите, что $\frac{2r}{3} \le x \le \frac{R}{3}$. Верно ли, что если одно из неравенств обращается в равенство, то треугольник – правильный ?

Задача 3. Каждая из трех равных окружностей касается двух сторон треугольника, четвертая окружность того же радиуса касается этих трех окружностей.
а) Докажите, что центр четвертой окружности лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей треугольника.
б) Укажите способ построения таких окружностей для данного треугольника.
в) Выразите радиус данных окружностей через радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника.

Задача 4. Докажите, что прямая Эйлера треугольника ABC параллельна стороне AB тогда и только тогда когда $\operatorname{tg}\angle A \cdot \operatorname{tg}\angle B = 3$.

Задача 5. Докажите, что три окружности, каждая из которых проходит через вершину треугольника, основание его высоты, опущенной из этой вершины, и касается радиуса описанной окружности, проведенного к данной вершине, пересекаются в двух точках, расположенных на прямой Эйлера треугольника.

Задача 6. Все углы треугольника ABC меньше $120°$, T – его *точка Торичелли* ($\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120°$).

а) Докажите, что прямая Эйлера треугольника ATB параллельна прямой CT.

б) Докажите, что прямые Эйлера треугольников ATB, BTC и CTA пересекаются в одной точке.

Задача 7. Дан остроугольный треугольник. Найдите для него все *треугольные бильярды*, т.е., все вписанные в него треугольники, обладающие следующим свойством: две стороны, выходящие из любой вершины вписанного треугольника образуют равные углы с соответствующей стороной данного треугольника.

Задача 8. Докажите, что ортоцентр треугольника является центром вписанной окружности для ортотреугольника.

Задача 9. Длины сторон остроугольного треугольника умножили на косинусы противоположных углов. Докажите, что из трех получившихся отрезков можно сложить треугольник. Чему равен радиус его описанной окружности, если радиус описанной окружности исходного треугольника равен R ?

Задача 10. Пусть ABC – данный треугольник, $A_1B_1C_1$ — его ортотреугольник. Докажите, что прямые Эйлера треугольников AB_1C_1, BC_1A_1 и CB_1A_1 пересекаются в одной точке, лежащей на окружности девяти точек треугольника ABC.

Задача 11. Дан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что окружности девяти точек треугольников ABC, BCD, CDA, DAB пересекаются в одной точке.

Задача 12. Верно ли, что площадь ортотреугольника не превосходит площади серединного треугольника ?

Задача 13. Биссектрисы углов треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A', B', C'. Докажите, что $S_{AC'BA'CB'} \geq 2S_{ABC}$.

Задача 14. Докажите, что для произвольной точки M, лежащей внутри треугольника, имеем $2\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}\right) \leq \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, где u, v, w – Расстояния от M до вершин треугольника, а x, y, z – расстояния до его сторон.