

В. Протасов (МГУ)

Геометрические задачи на максимум и минимум

Менделеево, 3 ноября, 2007.

Задача 1. Дан остроугольный треугольник. Найдите для него все *треугольные бильярд*ы, т.е., все вписанные в него треугольники, обладающие следующим свойством: две стороны, выходящие из любой вершины вписанного треугольника образуют равные углы с соответствующей стороной данного треугольника.

Задача 2. Исследуйте задачу Фаньяно для четырехугольника. Сколько может существовать четырехугольников минимального периметра, вписанных в данный четырехугольник ?

Задача 3. Дан квадрат $ABCD$ со стороной 1. На его диагонали BD построен забор в виде равнобедренного прямоугольного треугольника с основанием BD . Плоскость забора перпендикулярна плоскости квадрата. Найти кратчайший возможный путь муравья из точки A в точку C .

Задача 4. На основаниях AB и CD трапеции $ABCD$ взяты точки M и N соответственно. Рассматривается четырехугольник, который является пересечением треугольников ANB и CMC . При каком выборе точек M и N его площадь максимальна ? Чему равна максимальная площадь, если площадь трапеции равна S ?

Задача 5. Внутри угла с вершиной A даны точки M и C . Проведите через M отрезок BD с вершинами на сторонах угла, так, чтобы четырехугольник $ABCD$ имел наименьшую площадь.

Задача 6. Прямой, проходящей через данную точку внутри угла отрезать от этого угла треугольник наименьшего периметра.

Задача 7. Через данную точку M , лежащую внутри угла с вершиной K , провести отрезок AB с вершинами на сторонах угла так, чтобы

- а) сумма $KA + KB$ была наименьшей;
- б) сумма $\sqrt{KA} + \sqrt{KB}$ была наименьшей;
- в) сумма $\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB}$ была наибольшей.

Задача 8. Проведите касательную к данной окружности, лежащей внутри угла, которая отсекала бы от угла треугольник а) минимальной площади; б) минимального периметра.

Задача 9. Дана окружность и ее диаметр AC , а на диаметре дана точка M . Проведите через M хорду окружности BD так, чтобы площадь четырехугольника $ABCD$ была наибольшей.

Задача 10. На стороне AB треугольника ABC выбирается точка M , из нее параллельно двум фиксированным прямым проводятся прямые до пересечения со сторонами AC

и BC в точках K и L соответственно. Для какой точки M отрезок KL будет иметь наименьшую длину ?

Задача 11. Найти точку P внутри данного треугольника, для которой сумма отношений длин сторон треугольника к расстояниям от P до этих сторон минимальна.

Задача 12. Точка удалена от вершин прямоугольного треугольника на 2, 5 и 10 (2 – расстояние до вершины прямого угла). Какова может быть наибольшая площадь этого треугольника ?

Задача 13. Дан куб $ABCD A' B' C' D'$ со стороной 1. Найдите кратчайшее расстояние между точками двух окружностей, одна из которых вписана в квадрат $ABCD$, а другая описана около треугольника $BC' D'$.

Задача 14. На плоскости дана прямая и три точки, лежащие по одну сторону от нее. Найти (или охарактеризовать) положение точки на прямой, для которой сумма расстояний до трех данных точек минимальна.

Задача 15. В пространстве дана плоскость и три точки, лежащие по одну сторону от нее. Найти (или охарактеризовать) положение точки на плоскости, для которой сумма расстояний до трех данных точек минимальна.