Комби в теории чисел.
Группа Платана, 31.10.07-1

1) Покажите, что для любого натурального числа n существует бесконечно много пар взаимно простых чисел a, b, таких что a делит $n + b^2$ и b делит $n + a^2$.

2) Докажите, что для каждого натурального числа $n > 1$ найдется кратное ему число $m < n^4$, в десятичной записи которого используется не более 4 различных цифр.

3) Найдите все натуральные числа n, для которых все n чисел, состоящие из $n - 1$ цифры 1 и одной цифры 7, простые.

4) Решите уравнение $3^m + 4^n = 5^k$ в натуральных числах.

5) Найдите все нечетные числа $n > 1$, для которых существует перестановка $a_1, a_2, \dots, a_n$ чисел $1, 2, \dots, n$ такая, что все n следующих выражений положительны:

- $a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_n$,
- $a_2 - a_3 + a_4 - \dots - a_n + a_1$,
- $a_3 - a_4 + \dots + a_n - a_1 + a_2$,
- $\dots$,
- $a_n - a_1 + a_2 - \dots + a_{n-1}$.

6) Существует ли множество из 2007 натуральных чисел, сумма любого подмножества которых есть квадрат, куб или большая степень целого числа?

7) Докажите, что в любое конечное множество натуральных чисел можно добавить еще несколько чисел так, что каждое число из полученного набора будет делить сумму всех остальных чисел набора.

Комбинаторика.
Группа Платана, 31.10.07-2

1) Вершины связного графа покрашены в синий и красный цвета (есть хотя бы одна вершина красного цвета). Каждой вершине приписано положительное вещественное число. Известно, что каждой синей вершине приписано число, равное среднему арифметическому чисел, написанных в ее соседях. Известны числа в красных вершинах, и для каждой синей вершины известна сумма чисел, написанных в ее соседях. Докажите, что и сами числа в синих вершинах можно найти.

2) Дано натуральное число k. Докажите, что существует бесконечно много точных квадратов вида $2^k n - 7$.

3) Граф имеет $12k$ вершин, степень каждой равна $3k + 6$. Для каждой пары различных вершин есть ровно n вершин графа, соединенных с обеими вершинами пары. Найдите все возможные значения числа k, для которых найдется граф с каким-нибудь n.

4) На плоскости дано семейство из n векторов. Набор нескольких векторов семейства называется максимальным, если длина суммы векторов набора максимальна среди всех наборов из векторов семейства.

а) Докажите, что количество максимальных наборов не превосходит $2n$.

б) Постройте примеры семейств с $n = 4, 5$ векторами и с 8 и 10 максимальными наборами соответственно.

5) Докажите, что число различных деревьев с n занумерованными вершинами равно n^{n-2}.

6) Пусть A — это перестановка чисел $1, 2, \dots, n$ и B — это подмножество $\{1, 2, \dots, n\}$. Скажем, что A расщепляет B, если в перестановке A числа из множества B идут не подряд (порядок следования не важен). Докажите, что для любого набора из $n - 2$ подмножеств, в каждом из которых не менее двух и не более $n - 1$ элементов, найдется перестановка чисел $1, 2, \dots, n$, расщепляющая их всех.

Симметричные графы.
Группа Платана, 4.11.07-2.

Мы будем работать со связными ориентированными графами, из каждой вершины графа выходят два ребра и в каждую входят два ребра. Такой граф назовем симметричным, если для любой пары ребер a, b существует перестановка вершин графа (а если есть кратные ребра, то и перестановка их между собой), при которой все ребра графа переходят в ребра этого же графа, а ребро a переходит в ребро b (направления всех ребрах сохраняются). При этом никакое ребро не должно остаться на месте.

1) Для каждого натурального n придумайте два симметричных графа с n вершинами каждый.

2) Придумайте (дополнительно к 1) симметричные графы с 6, 12 и 30 вершинами.

3) Найдите все симметричные графы, которые имеют хотя бы одну петлю или хотя бы одно кратное ребро.

4) Найдите все симметричные графы с p-вершинами (p — простое число).

5) Найдите все симметричные графы с не более, чем 8 вершинами.

6)а) Найдите все симметричные графы, которые можно нарисовать (без самопересечений) на плоскости так, что для каждой вершины входящие ребра чередуются с выходящими.

6)б)* Найдите все плоские симметричные графы.

Теорема Фари.

Группа Платана, 5.11.07-1.

1) В плоском графе с треугольными гранями выкинули вершину вместе с выходящими из нее ребрами.

а) Верно ли, что получившаяся грань ограничена простым циклом? (Ограниченность грани простым циклом означает, что внутри или снаружи (там, где грань) этого простого цикла нет больше вершин графа).

б) Верно ли, что если выкинуть еще одну вершину, то все грани опять будут ограничены простыми циклами?

в) Из начального графа выбросили одну вершину и получили новый граф, степень каждой вершины которого хотя бы 3. Верно ли, что любую вершину нового графа можно удалить и получить граф, все грани которого будут ограничены простыми циклами?

2) Дан невыпуклый многоугольник с непрозрачными сторонами. Назовем "областью видимости" множество его внутренних точек, из которых видны все вершины многоугольника. Докажите, что многоугольник с непустой областью видимости можно разрезать прямой на два многоугольника с непустой областью видимости каждый.

3) (т. Фари) Докажите, что плоский граф можно нарисовать на плоскости так, что все ребра будут отрезками.

4) Докажите формулу Эйлера $V - E + F = 2$, где V, E и F — число вершин, ребер и граней плоского связного графа с ребрами — отрезками, соответственно.

5) Докажите, что любой связный граф с g ребрами можно нарисовать внутри правильного $2g$-угольника так, что некоторые ребра являются отрезками, а остальные ребра являются двумя непересекающимися отрезками. Одни концы двух отрезков одного ребра есть вершины графа (концы этого ребра), а другие концы отрезков лежат на диаметрально противоположных сторонах $2g$-угольника.