О теореме Понселе

В наиболее простой форме теорема Понселе утверждает следующее.

Теорема Понселе. Пусть даны две окружности, одна из которых лежит внутри другой. Из точки A_0 большей окружности проведем касательную к меньшей и найдем вторую точку A_1 пересечения этой касательной с большей окружностью. По точке A_1 аналогично построим точку A_2 и т.д. Тогда, если $A_0 = A_n$ для какой-то точки A_0, это будет выполнено и для любой другой точки большой окружности

Говоря неформально, вписанно-описанный многоугольник можно "вращать" между двумя окружностями (при этом его форма, вообще говоря, меняется). Будем называть такой "вращающийся" многоугольник многоугольником Понселе. Предлагаемая серия задач содержит доказательство теоремы Понселе и некоторых свойств многоугольников Понселе для $n = 3, 4$.

Теорема Понселе для $n = 3$

1. Пусть O, I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника, R, r — их радиусы. Докажите **формулу Эйлера**

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

2. Докажите теорему Понселе для $n = 3$.

С каждым треугольников связан ряд так называемых замечательных точек или центров. Когда треугольник "вращается" между описанной и вписанной окружностями, эти точки движутся по каким-то кривым. В следующих задачах требуется найти соответствующие траектории.

3. Какую траекторию описывает

a) точка пересечения медиан M;

b) ортоцентр H;

c*) точка Жергонна (точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника и точки касания противоположных сторон с вписанной окружностью) G

треугольника Понселе?

Точку M обычно называют центром тяжести треугольника. На самом деле эта точка является центром тяжести трех равных масс, помещенных в вершины треугольника, и центром тяжести сплошного треугольника, например, вырезанного из картона. Если же масса треугольника сосредоточена на его периметре, как у треугольника, сделанного из проволоки, то центром тяжести будет другая точка M_1. Соответственно, для произвольного многоугольника можно определить три центра: центр тяжести вершин M_0, центр тяжести периметра M_1 и центр тяжести сплошного многоугольника M_2.

4. Найдите центр M_1 треугольника и его траекторию при "вращении".

5. Пусть A', B', C' — точки касания сторон треугольника Понселе с вписанной окружностью. Найдите траекторию центра тяжести (M_0) треугольника $A'B'C'$.

6*. Дан треугольник Понселе и неподвижная точка P. Найдите траекторию точки, изогонально сопряженной P.

Теорема Понселе для $n = 4$

7. Дана окружность и точка P внутри нее. Рассмотрим пары перпендикулярных лучей с началом P, пересекающих окружность в точках A и B.

a) Найти геометрическое место середин отрезков AB.

b) Найти геометрическое место точек пересечения касательных к окружности в точках A и B.

8. Доказать теорему Понселе для $n = 4$.

9. Пусть две окружности с центрами O, I и радиусами R, r удовлетворяют теореме Понселе для $n = 4$. Вывести соотношение, связывающее величины R, r и $d = OI$.

10.

a) Доказать, что диагонали всех вписанно-описанных четырехугольников с данными вписанной и описанной окружностями пересекаются в одной точке P, лежащей на прямой OI.

b) Вывести соотношение, связывающее OP, R и d.

11. Доказать, что прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон вписанно-описанного четырехугольника с вписанной окружностью, являются биссектрисами углов между его диагоналями.

12. Найти центры тяжести M_0, M_1, M_2 четырехугольника и их траектории.

13*. Докажите, что в четырехугольнике Понселе

a) произведение тангенсов углов, образованных диагоналями с прямой OI;

b) произведение длин диагоналей

постоянно

Литература

1. Заславский А.А., Челноков Г.Р. Теорема Понселе в евклидовой и алгебраической геометрии. Математическое образование. 2001. N 4(19).

2. Заславский А., Косов Д., Музафаров М. Траектории замечательных точек треугольника Понселе. Квант. 2003. N 2.

3. Акопян А.В., Заславский А.А. Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2007.