Группа лютни

Степень точки относительно окружности

04.11.07 Утро, Андрей Гаврилюк

Пусть на плоскости даны окружность $\omega(O, R)$ (т.е. с центром в точке O и радиусом R) и точка X.

Внутренней степенью точки X относительно окружности ω назовем величину

$$d_\omega^{in}(X) = XO^2 - R^2$$

Упражнение 1:

1. Какова область определения функции $d_\omega^{in}(X) = XO^2 - R^2$?
2. Найти область значений этой функции.

Пусть также дана прямая l, проходящая через точку X и пересекающая окружность ω в двух точках A и B(считаем, что в случае касания окружности, эти точки совпадают)

Внешней степенью точки X относительно окружности ω назовем величину

$$d_\omega^{out}(X) = \begin{cases} XA * XB & \text{, если точка } X \text{ лежит снаружи } \omega \\ -XA * XB & \text{, если точка } X \text{ лежит внутри } \omega \\ 0 & \text{, если точка } X \text{ лежит на } \omega \end{cases}$$

Упражнение 2: Доказать, что $d_\omega^{out}(X) = \overrightarrow{XA} * \overrightarrow{XB}$, т.е. внешняя степень относительно окружности равна скалярному произведению векторов $\overrightarrow{XA}, \overrightarrow{XB}$

По данному определению степень внешняя степень точки X относительно окружности ω зависит от выбора прямой l. На самом деле это не так.

Лемма 1. Для данной точки X и окружности ω внешняя степень $d_\omega^{out}(X)$ не зависит от выбора прямой l. В частности, она равняется квадрату отрезка касательной, проведенной к окружности ω из точки X (в случае, когда X лежит снаружи ω).

Лемма 2. Для любой точки X верно $d_\omega^{in}(X) = d_\omega^{out}(X)$

Степенью точки X относительно окружности ω называется величина

$$d_\omega(X) = d_\omega^{in}(X) = d_\omega^{out}(X)$$

1. В угол вписаны две окружности. K, L - точки касания разных окружностей, лежащие на разных лучах. Доказать, что окружности высекают равные отрезки на KL.

2. **Лемма о бабочке.** Через середину C произвольной хорды окружности проведены две хорды KL и MN (точки K и M лежат по одну сторону от AB); KN пересекает AB в точке Q, ML - в точке P. Доказать, что $CP = CQ$.

3. BD - биссектриса угла B треугольника ABC. Описанная окружность треугольника BDC пересекает отрезок AB в точке E, описанная окружность треугольника ABD пересекает отрезок BC в точке F. Докажите, что $AE = CF$.

4. В треугольнике ABC, точка Q лежит на стороне BC, точка P лежит на стороне AB, H - точка пересечения AQ и CP. Описанные окружности треугольников APC и AQL пересекаются в точках $K,\ L$. Докажите, что точки $K,\ L$ и H лежат на одной прямой.

Радикальной осью (неконцентрических) окружностей ω_1 **и** ω_2 называется геометрическое место точек X таких, что $d_{\omega_1}(X) = d_{\omega_2}(X)$

Упражнение 3: Радикальная ось окружностей $\omega_1(O_1, R_1)$ и $\omega_2(O_2, R_2)$ - это прямая перпендикулярная O_1O_2.

1. На плоскости даны три попарно неконцентрические окружности. Доказать, что их попарные радикальные оси пересекаются в одной точке.

2. Точка X лежит на общей хорде PQ двух окружностей. Через X проходят отрезки AC и BD, причем точки A, B лежат на одной окружности, C, D - на другой. Y - точка пересечения прямых AB и CD. Докажите, что прямые $PQ,\ AB$ и CD пересекаются в одной точке.

3. Даны две неконцентрические окружности. Докажите, что множеством центров окружностей, пересекающих обе эти окружности под прямым углом, является радикальная ось, из которой (если данные окружности пересекаются), выброшена их общая хорда.

4. В треугольнике ABC проведены высоты $AA_1,\ BB_1$ и CC_1. Прямые AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 пересекаются в точках $C',\ B'$ и A'. Докажите, что эти точки лежат на радикальной оси окружности девяти точек и описанной окружности.

5. Биссектрисы внешних углов треугольника ABC пересекают продолжения противоположных сторон в точках $A',\ B'$ и C'. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой, причем эта прямая перпендикулярна прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC.

6. Даны четыре окружности $S_1,\ S_2,\ S_3$ и S_4, причем окружности S_i и S_{i+1} касаются внешним образом для $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ $(S_5 = S_1)$. Докажите, что радикальная ось окружностей S_1 и S_3 проходит через точку пересечения общих внешних касательных к S_2 и S_4.