

# Криволинейные треугольники и неевклидова геометрия

М. Скопенков

**Основной пример.** При многократных отражениях относительно сторон правильного треугольника на плоскости получается разбиение плоскости на бесконечное число правильных треугольников.

*Криволинейным треугольником* назовем фигуру, составленную из трех дуг окружностей  $a$ ,  $b$  и  $c$ . *Отражением* относительно стороны криволинейного треугольника назовем инверсию относительно соответствующей окружности.

**Основной вопрос.** Что получится в результате многократного отражения относительно сторон данного *криволинейного* треугольника  $\Delta$ ?

1. Ответьте на этот вопрос в случае, когда  $\Delta$  — правильный криволинейный треугольник с тремя углами по  $90^\circ$  (нарисуйте получающуюся картинку).
2. Пусть  $\Delta$  — правильный криволинейный треугольник с нулевыми углами. Докажите, что его образы при многократных отражениях лежат внутри его описанной окружности.
3. Пусть  $\Delta$  — правильный криволинейный треугольник, все три угла которого  $< 60^\circ$ .
  - a) Докажите, что существует окружность  $d$ , перпендикулярная всем трем его сторонам  $a$ ,  $b$  и  $c$ .
  - b) Любая композиция отражений относительно  $a$ ,  $b$  и  $c$  оставляет окружность  $d$  на месте.
  - c) Образы треугольника  $\Delta$  при многократных отражениях лежат внутри круга, ограниченного окружностью  $d$ .
4. Пусть  $\Delta$  — криволинейный треугольник с суммой углов  $< 180^\circ$ . Докажите, что все его образы при многократных отражениях содержатся в некотором круге.
5. Пусть  $\Delta$  — криволинейный треугольник с суммой углов  $180^\circ$ .
  - a) Докажите, что три его стороны  $a$ ,  $b$  и  $c$  пересекаются в одной точке.
  - b) Докажите, что плоскость нельзя покрыть конечным числом его образов при многократных отражениях.
  - c) Докажите, что все его образы при многократных отражениях покрывают плоскость.
6. Назовем *биссектрисой* двух пересекающихся окружностей окружность, проходящую через обе точки их пересечения и делящую угол между ними пополам. Докажите, что три биссектрисы криволинейного треугольника с суммой углов  $180^\circ$  пересекаются в одной точке.
7. Пусть  $\Delta$  — 'осьмушка' сферы. Какая картинка на сфере получится при многократных отражениях относительно плоскостей, содержащих стороны 'треугольника'  $\Delta$ ? Сравните результат с ответом в задаче 1.
8. Пусть  $\Delta$  — криволинейный треугольник с суммой углов  $> 180^\circ$ , пусть  $a$ ,  $b$  и  $c$  — его стороны.
  - a) Докажите, что при стереографической проекции на некоторую сферу, касающуюся плоскости в радикальном центре трех окружностей  $a$ ,  $b$  и  $c$ , эти окружности переходят в большие окружности сферы.
  - b) Докажите, что плоскость покрывается конечным числом образов треугольника  $\Delta$  при многократных отражениях.
9. Докажите, что три биссектрисы криволинейного треугольника с суммой углов  $> 180^\circ$  пересекаются в одной точке.