Группа "Тайфуна".

Комбинаторная геометрия: отрезки, прямоугольники, параллелепипеды...

## Порция 1.

1.1. На прямой расположено несколько отрезков так, что каждый пересекается не менее, чем с половиной из оставшихся. Докажите, что некоторый отрезок пересекается со всеми оставшимися.

1.2. На прямой расположено несколько отрезков так, что каждая точка покрыта не более, чем $k$ отрезками. Докажите, что отрезки можно разделить на $k$ семейств так, чтобы в каждом семействе отрезки не пересекались.

1.3. Коридор длины $l$ произвольным образом покрыли дорожками (конечным числом). Докажите, что можно убрать некоторые дорожки так, чтобы оставшиеся дорожки покрывали весь коридор, и их суммарная длина не превышала $2l$.

1.4. Коридор длины $l$ произвольным образом покрыли дорожками (конечным числом). Каждую дорожку разрезали пополам, и убрали одну из половин. Докажите, что оставшиеся половины покроют не менее трети коридора.

(Д. Фомин, из Ленинградских олимпиад)

1.5.* Каждый из семи ребят в воскресенье 3 раза катался на коньках на катке. Известно, что каждые двое из них в некоторый момент были на льду одновременно. Докажите, что в некоторый момент на льду оказались одновременно трое ребят.

(А. Анджанс, из Всесоюзных олимпиад)

## Порция 2.

2.1. На плоскости расположено несколько прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат так, что каждый пересекается не менее, чем с $3/4$ из оставшихся. Докажите, что некоторый прямоугольник пересекается со всеми оставшимися.

2.2. На плоскости расположено несколько равных квадратов со сторонами, параллельными осям координат так, что каждая точка покрыта не более, чем $k$ прямоугольниками. Докажите, что прямоугольники можно разделить на $2k-1$ семейств так, чтобы в каждом семействе прямоугольники не пересекались.

2.3. На столе $20 \times 20$ разбросано 90 салфеток $1 \times 1$ со сторонами, параллельными краям стола. Докажите, что можно положить еще одну такую салфетку, не пересекающуюся с уже лежащими.

## Порция 3.

3.1. На столе разбросаны прямоугольники (как угодно) так, что любые два пересекаются. Докажите, что найдется прямая, пересекающая их все.

3.2. На столе $20 \times 20$ разбросано 95 салфеток $1 \times 1$ (как угодно). Докажите, что на столе можно нарисовать круг диаметра 1, не пересекающий салфетки.

3.3.* В пространстве расположены 12 прямоугольных параллелепипедов с ребрами, параллельными осям координат. Поставим в соответствие каждому из параллелепипедов вершину графа. Две вершины соединим ребром тогда и только тогда, когда соответствующие параллелепипеды не пересекаются. Может ли граф оказаться циклом длины 12?

(А. Акопян — со Всероссийской олимпиады)

3.4.* (Багаж в метро) Можно ли в некотором прямоугольном параллелепипеде с суммой ребер $d$ поместить некоторый прямоугольный параллелепипед с суммой ребер, большей $d$?

(А. Шень, с Московской олимпиады(?))

Комментарии, указания и решения.

При решении задач предложенной серии полезны многие стандартные подходы, такие как применение индукции, принцип Дирихле. Особенно часто и эффективно при решении задач по комбинаторной геометрии применяется принцип "крайнего", состоящий в рассмотрении объекта, выделяющийся некоторым особым свойством среди всех объектов. Начало рассуждений по принципу крайнего может выглядеть, например, так: "среди концов всех отрезков (конечного числа) рассмотрим самый левый (т. е. имеющий наименьшую абсциссу)" или "рассмотрим пару самых удаленных точек данного конечного множества", и т. д. Задачи порции 1 представляют серию по "одномерной" геометрии.

1.1. *Решение.* Пусть даны отрезки $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть $a = a_i = max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $b = b_j = min\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Если $a \geq b$, то все отрезки содержат $[a, b]$. Иначе более $n/2$ отрезков пересекают $[a, b]$, и значит содержат точку $a$ (считаем, что отрезок пересекается сам с собой). Также более $n/2$ отрезков пересекают $[a, b]$, и значит содержат точку $b$. По принципу Дирихле найдется отрезок, содержащий и $a$, и $b$. Этот отрезок пересекает все отрезки.

1.2. *Набросок решения.* Пусть даны отрезки $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Применим индукцию по $n$. Пусть $a = a_i = max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Любой отрезок, пересекающий $[a_i, b_i]$, покрывает $a_i$, поэтому $[a_i, b_i]$ пересекается не более, чем с $k - 1$ отрезками. Выбросив $[a_i, b_i]$ из рассмотрения, применим предположение индукции к оставшимся отрезкам. Вернув $[a_i, b_i]$, покрасим его в цвет, отличный от цвета пересекающихся с ним отрезков.

1.3. *Набросок решения.* Уберем дорожку, если она покрыта объединением остальных. После конечного числа шагов мы придем к такой системе дорожек, что каждая коридора покрыта не более, чем двумя дорожками.

1.4. *Указание.* Пусть после удаления половин мы пришли к объединению покрытых дорожками отрезков $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$. "Раздуем" $\Delta_k$ в три раза, т. е. рассмотрим отрезок $\Delta'_k$, полученный из $\Delta_k$ гомотетией с центром с его середине и коэффициентом 3. Докажите, что отрезки $\Delta'_1, \ldots, \Delta_n$ покроют коридор.

1.5. *Набросок решения.*

Время пребывания на катке каждого из ребят — объединение $A_i$ трех попарно непересекающихся отрезков на числовой оси $t$ — итого у нас множество $E = \cup_{i=1}^{7} A_i$ из $3 \cdot 7 = 21$ отрезков на прямой. Множество $V$ вершин всех этих отрезков состоит из 42 точек (можно вершины считать различными). Оценим число таких пар $(e, v)$, для которых отрезок $e \in E$ содержит вершину $v \in V$ отрезка, отличного от $e$. Каждое пересечение $A_i \cap A_j$ дает хотя бы две такие пары. Тогда всего таких пар не меньше $2^3_7 = 42$. Кроме того, самая левая вершина из $E$ не входит ни в одну такую пару, поэтому некоторая вершина входит хотя бы в две пары, т.е. некоторый конец отрезка покрыт двумя другими отрезками. Этот конец отрезка соответствует искомому моменту времени.

2.1. Задачи порции 2 "двумерны". Здесь бывает полезна идея понижения размерности — спроектировав картинку на оси координат, мы приходим к "одномерным" задачам.

*Набросок решения.* Спроектируем прямоугольники на оси координат. Методом задачи 1.1 покажем, что найдется более $n/2$ прямоугольников, проекция которых на ось $Ox$ пересекается с проекцией любого из оставшихся. Назовем такие прямоугольники $x$-подходящими. Аналогично, найдем более $n/2$ $y$-подходящих прямоугольников. По принципу Дирихле найдется прямоугольник, одновременно $x$-подходящий и $y$-подходящий. Нетрудно видеть, что он пересекается со всеми остальными прямоугольниками.

2.2. *Набросок решения.* Рассмотрим самый верхний из равных квадратов. С ним пересекается не более $2(k - 1)$ квадратов (каждый из них содержит одну из двух нижних вершин). Далее, как и в задаче 1.2, применим индукцию по числу квадратов.

2.3. *Указание.* Для каждого квадрата $A$ произведем "раздувание": рассмотрим квадрат $A'$, полученный гомотетией с центром в центре $A$ и коэффициентом 2. Квадраты $A$ и $B$ не пересекаются тогда и только тогда, когда $A'$ не содержит $B$. Совершив раздувание квадратов, докажите, что останется место для центра еще одного квадрата.

Литература: Dol'nikov V.L. *Some Problems for Mathematical Olympiad. Combinatorial Geometry*, CIMAT, Mexico, 2004.