

## Другие многочлены

11.11.08 ... за 3 года до судного дня...

1. а) Про многочлен  $P(x)$  известно, что для любого  $\epsilon > 0$  найдётся  $x$  такое, что  $|P(x)| < \epsilon$ . Верно ли, что у него есть корень?  
б) Про многочлен  $P(x, y)$  известно, что для любого  $\epsilon > 0$  найдутся  $x$  и  $y$  такие, что  $|P(x, y)| < \epsilon$ . Верно ли, что у него есть корень?
2. Пусть  $P(x)$  — многочлен со старшим коэффициентом 1, а последовательность целых чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots$  такова, что  $P(a_1) = 0$ ,  $P(a_2) = a_1$ ,  $P(a_3) = a_2$ , и т. д. Числа в последовательности не повторяются. Какую степень может иметь  $P(x)$ ?
3. Многочлен  $P(x)$  с действительными коэффициентами таков, что уравнение  $P(m) + P(n) = 0$  имеет бесконечно много решений в целых числах  $m$  и  $n$ . Докажите, что у графика  $y = P(x)$  есть центр симметрии.
4. Для некоторого многочлена существует бесконечное множество его значений, каждое из которых многочлен принимает по крайней мере в двух целочисленных точках. Докажите, что существует не более одного целого значения, которое многочлен принимает ровно в одной целой точке.
5. Последовательность натуральных чисел  $(a_n)$  удовлетворяет следующим условиям: 1) при любых различных  $n$  и  $k$  число  $a_n - a_k$  делится на  $n - k$ ; 2) существует такой многочлен  $P(x)$  степени  $m$ , что  $a_n < P(n)$  при любом  $n$ . Докажите, что  $a_n$  есть многочлен.
6. Если значения приведенного многочлена в целых точках есть квадраты целых чисел, то он сам есть квадрат другого многочлена.