

Циклы в графах и в гиперграфах

С. ДЖЕНЖЕР, А. МИРОШНИКОВ, О. НИКИТЕНКО, А. СКОПЕНКОВ

Содержание

Введение	1
1. Одномерные циклы в графе	3
2. Симметричные одномерные циклы и другие обобщения	7
3. Геометрическое отступление: декартово произведение графов *	9
4. Одномерные циклы в произведении графов	11
5. Симметричные одномерные циклы в квадрате графа *	14
6. Циклы в гиперграфах *	17
7. Двумерные циклы в произведении графов	20
8. Двумерные циклы во взрезанном квадрате графа *	23
9. Симметричные двумерные циклы в квадрате графа *	25
Список литературы	28

ВВЕДЕНИЕ

Строгое определение графа дано в начале §2. До этого можно работать с графиками на интуитивном уровне.

Назовем **1-циклом** (подробнее: одномерным симплициальным циклом по модулю 2) в графе множество C ребер такое, что каждая вершина принадлежит четному числу ребер из C . Например, цикл в смысле теории графов — это 1-цикл, но не наоборот. Например, в окружности два 1-цикла, в графике «восьмерка» — четыре, а в графике K_4 — восемь (последнее не так очевидно).

Этот текст начинается с нахождения

- количества всех 1-циклов в данном графике (утверждения 1.3.a, 1.4.a и 1.5.a);
- небольшого количества 1-циклов в данном графике таких, что любой 1-цикл является суммой (по модулю 2) нескольких из них (легко проверить, что сумма 1-циклов тоже является 1-циклом; утверждения 1.3.cde, 1.4.c, 1.5.cc' и лемма 1.6);
- соотношений между простейшими 1-циклами (утверждение 1.8.b и 1.9.b).

Далее рассматриваются обобщения указанных задач на графы с симметрией, на *двумерные гиперграфы*, а также на некоторые конфигурационные пространства, связанные с графиками — *квадрат* и *врезанный квадрат* (все выделенные курсивом понятия определены ниже). Основные результаты — описание (и вычисление количества)

- симметричных 1-циклов в графах с симметрией (лемма 2.2 и утверждения 2.3, 5.3),
- 2-циклов в полном двумерном гиперграфе (утверждение 6.2.a),

С. Дженжер, А. Мирошников, А. Скопенков: Московский физико-технический институт.

О. Никитенко: Алтайский технический университет.

А. Скопенков: Независимый московский университет, <https://users.mccme.ru/skopenko/>.

Предыдущая версия этого текста была представлена в 2023 году на [SC]. Мы благодарны Э. Алкину и А. Воропаеву за совместную работу над той версией, А. Воропаеву за редактирование решений к §2 той версии, И. Богданову, Р. Карасеву, А. Рябичеву и О. Стырту за полезные обсуждения, а также А. Рябичеву за подготовку некоторых рисунков.

- многомерных циклов в многомерном аналоге полного двудольного графа (утверждение 6.5.c),
- 1-циклов по модулю границ и 2-циклов в квадрате графа (это частные случаи знаменитой теоремы Кюннета о гомологиях произведения — теоремы 4.7 и 7.7),
- порождающих в множестве 2-циклов во взрезанном квадрате графа (теорема 9.8.a).

Последний результат связан с парадоксальным примером: различные поверхности допускают «одинаковую» склейку из одинакового числа квадратиков (замечание 8.6.ab).

Этот текст демонстрирует важные идеи алгебраической топологии на языке, доступном математикам и специалистам по компьютерной науке, не знакомым с топологией. Понятие 1-цикла и его обобщения имеют многочисленные приложения. О наиболее простых из них см., например, [Sk20, §§4.11, 6, 9], [Sk, §§1, 8, 9]. Хотя этот текст элементарен, он мотивирован передним краем науки, см. [Va92, FH10, MS17, SS23] и ссылки в этих работах. Имеются красивые задачи для исследования (5.6, 5.7.bcd, 5.8 и 9.9.bcd), решение которых нам неизвестно; некоторые из них могут оказаться несложными.

О стиле этого текста

Основные идеи представлены на «олимпиадных» примерах: на простейших (обычно маломерных) частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением к необходимому минимуму алгебраического языка. За счет этого и текст становится доступным для начинающих, и удается быстро добраться до интересных сложных и важных результатов, методов и теоретических идей. Более простой материал приводится для того, чтобы сделать естественным и доступным более сложный.

Как правило, мы приводим *формулировку* красивого или важного утверждения *перед* последовательностью определений и результатов, составляющих его *доказательство*. В таких случаях для доказательства утверждения требуется часть дальнейшего материала. Об этом указано после формулировок. Некоторые теоремы приведены без доказательств, тогда даются ссылки вместо указаний. Основные результаты называются «теоремами», менее важные результаты — «утверждениями», важные вспомогательные результаты — «леммами».

Изучение путем решения задач не только характерно для серьезного изучения математики [HC19, §1.1], [ZSS, §1.2], но и продолжает древнюю культурную традицию. В тексте имеется небольшое количество задач (полезно рассматривать и утверждения как задачи). Если условие задачи является формулировкой утверждения, то в задаче требуется это утверждение доказать (и тогда в ссылках мы называем это утверждение утверждением, а не задачей). Указания к задачам приводятся либо сразу, либо в конце параграфа. Если к задаче или утверждению не приведено доказательство, то оно несложное. *Загадкой* называется не сформулированный четко вопрос; здесь нужно придумать и четкую формулировку, и доказательство.

Определения важных понятий помечены **жирным шрифтом**, чтобы их было проще найти.

Замечания формально не используются в дальнейшем.

Разделы и задачи, отмеченные звездочкой, не используются в дальнейшем.

К представлению на летней конференции *

Важнейший результат интеллектуальной деятельности — текст (или программа), который можно прочитать (или которой можно воспользоваться) без консультаций с ее автором. В научном мире (и не только) для подготовки таких текстов принята система «тищательного рецензирования». При ней окончательный (публикуемый, награждаемый) текст формируется в процессе работы автора над замечаниями рецензента. Учителю и (постепенно) ученику полезно знакомиться с таким стилем работы. Опишем конкретную реализацию такого знакомства при представлении прошлой версии этого текста на [SC].

Команда, работающая над проектом, может состоять из любого числа участников. За каждое решение, **написанное для пользователя**, оцененное в «+» или «+.», команда получает

пять «бобов» (см. рекомендации <https://www.mccme.ru/circles/oim/home/pism.pdf>). Дополнительные бобы могут выдаваться за красивые решения, решения сложных задач или оформление некоторых решений в системе ТЕХ. У жюри бесконечно много бобов. У каждой команды в начале пять бобов. Решения можно сдавать и *устно*, и как *написанные для соавтора*, если у команды есть бобы. Команда отдает один боб за каждую попытку сдачи (удачную или нет). Участники сами выбирают задачу, по которой пишут решение для пользователя, но могут обсудить с жюри свой выбор. Приглашаем Вас *обсуждать* с жюри возникающие вопросы (без траты бобов). В частности, жюри может помочь записать решение для пользователя, или дать подсказку к задаче, которая долго не решается.

Те, кто успешно работают над проектом, завоюют право получить интересные *дополнительные задачи для исследования*.

1. ОДНОМЕРНЫЕ ЦИКЛЫ В ГРАФЕ

Задача 1.1. На плоскости нарисован без самопересечений граф (не обязательно связный), из каждой вершины которого выходит четное число ребер. Тогда грани можно раскрасить в два цвета *правильно*, т. е. так, что при переходе через каждое ребро цвет грани меняется.

Обозначим через

- $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$;
- K_n полный граф на множестве $[n]$ вершин;
- $K_{m,n}$ полный двудольный граф солями $[m]$ и $[n]'$ (мы обозначаем через A' копию объекта A).

Простым циклом $v_1v_2\dots v_k$ **длины** k в графе называется множество $\{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_kv_1\}$ ребер такое, что вершины v_1, \dots, v_k попарно различны. **Простым циклом** называется простой цикл произвольной длины. Мы пропускаем слово «простой», если оно понятно из контекста.

Определение 1-цикла дано во введении. Очевидно, что любой простой цикл является 1-циклом. Мы часто обозначаем множество ребер графа так же, как сам граф.

Суммой (суммой по модулю 2, или симметрической разностью) множеств A и B называется

$$A + B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Утверждение 1.1 означает, что если плоский граф является 1-циклом, то он равен сумме границ всех его граней.

Утверждение 1.2. Сумма 1-циклов является 1-циклом.

Доказательство. Возьмем 1-циклы C_1 и C_2 . Назовем степенью $d_C(v)$ вершины v в наборе C ребер количество ребер этого набора, которым принадлежит вершина v . Тогда

$$d_{C_1+C_2}(v) = d_{C_1}(v) + d_{C_2}(v) - 2d_{C_1 \cap C_2}(v)$$

четно. Поэтому $C_1 + C_2$ является 1-циклом. □

Задача 1.3. (a) Количество 1-циклов в K_n равно $2^{\binom{n-1}{2}}$.

(b) Если все ребра 1-цикла в K_n имеют общую вершину, то этот 1-цикл пустой.

(c) Любой 1-цикл в K_n является суммой нескольких циклов длины 3.

(d) Любой 1-цикл в K_n является суммой нескольких из следующих циклов: цикл 123 и циклы длины 4.

(e) Цикл 123 не является суммой никаких циклов длины 4 в K_n .

П. (b) доказывается напрямую.

Доказательство pp. (c,d,e). (c) Покажем, что произвольный 1-цикл C в K_n равен сумме

$$\widehat{C} := \sum_{ij \in C, i,j < n} ijn$$

циклов ijn по всем ребрам $ij \in C$, не содержащим вершину n . Каждое ребро в $C + \widehat{C}$ содержит вершину n . Из этого и п. (b) следует, что $C + \widehat{C} = \emptyset$, т. е. $C = \widehat{C}$.

(П. (c) также следует из утверждения 1.5.c', поскольку любой простой цикл в K_n , не имеющий хорд, имеет длину 3.)

(d) Из п. (c) следует, что достаточно доказать п. (d) для циклов длины 3. Назовем цикл длины 3 *представимым*, если его сумма с циклом 123 представима в виде суммы циклов длины 4. Цикл 123 представим. Сумма двух циклов длины 3, имеющих общее ребро, является циклом длины 4. Поэтому если цикл α длины 3 представим, то представим и любой цикл длины 3, имеющий с α общее ребро. Следовательно, все циклы длины 3 представимы.

(e) Для конечного множества X обозначим через $|X|_2 \in \mathbb{Z}_2$ четность количества элементов в множестве X . Тогда для любых 1-циклов C, C' выполнено $|C + C'|_2 = |C|_2 + |C'|_2$. \square

Пустой цикл мы обозначаем нулем. Обозначим через $H_1(K)$ множество всех 1-циклов в графе K , с операцией сложения. Мы иногда сокращаем $f(x)$ до fx для образа элемента x при отображении f .

Доказательство утверждения 1.3.a. Достаточно доказать, что существует взаимно однозначное соответствие между $H_1(K_n)$ и множеством $2^{K_{n-1}}$ подмножеств рёбер из K_{n-1} .

Определим отображения

$$\begin{aligned}\varphi: H_1(K_n) &\rightarrow 2^{K_{n-1}} \quad \text{формулой} \quad \varphi C := C \cap K_{n-1}, \\ \widehat{\varphi}: 2^{K_{n-1}} &\rightarrow H_1(K_n) \quad \text{формулой} \quad \widehat{\varphi} D := \sum_{ij \in D} ijn.\end{aligned}$$

Поскольку $\varphi(ijn) = \{ij\}$, то $\varphi\widehat{\varphi}D = D$ для любого $D \subset K_{n-1}$. Обратно, для любого $C \in H_1(K_n)$ имеем $\widehat{\varphi}\varphi C = \widehat{C} = C$, где второе равенство доказано в доказательстве п. (c). Таким образом, φ и $\widehat{\varphi}$ являются взаимно однозначными соответствиями. \square

Следующие утверждения 1.4 и 1.5 (и их доказательства) аналогичны утверждению 1.3 с заменой полного графа на полный двудольный граф и на произвольный граф.

Задача 1.4. (a) Количество 1-циклов в $K_{n,n}$ равно $2^{(n-1)^2}$.

(b) Если каждое ребро некоторого 1-цикла в $K_{n,n}$ содержит хотя бы одну из вершин n или n' , то этот 1-цикл пустой.

(c) Любой 1-цикл в $K_{n,n}$ является суммой нескольких циклов длины 4.

Утверждение 1.5. (a) В связном графе с V вершинами и E ребрами количество 1-циклов равно 2^{E-V+1} .

(b) В дереве есть ровно один 1-цикл, и он пустой.

(c) Любой 1-цикл является суммой нескольких простых циклов.

(c') Любой 1-цикл является суммой нескольких простых циклов, не имеющих хорд. Хордой в простом цикле называется ребро графа, не лежащее в этом цикле (т. е. ребро между двумя непоследовательными вершинами цикла).

П. (b) доказывается напрямую. П. (c') следует из п. (c), поскольку любая хорда простого цикла дает его представление в виде суммы двух простых циклов меньшей длины. Пп. (a,c) получаются из следующей леммы¹.

Пусть T — остворное дерево в связном графе K и $\sigma \in K \setminus T$ — ребро. Обозначим через $\widehat{\sigma}$ простой цикл в K , образованный ребром σ и простым путем в T , соединяющим концы ребра σ .

¹А вот набросок прямого доказательства п. (c). Достаточно доказать, что любой 1-цикл C является суммой нескольких реберно непересекающихся простых циклов, содержащихся в C . Поскольку каждая вершина 1-цикла принадлежит четному числу ребер из него, в C содержится простой цикл. Удаляя из C ребра этого простого цикла, получаем также 1-цикл. Продолжая, получим набор реберно непересекающихся простых циклов, объединение которых равно C . Поэтому их сумма равна C .

Лемма 1.6. Для любых оставного дерева T в связном графе K и 1-цикла C в K

$$C = \widehat{C} := \sum_{\sigma \in C \setminus T} \widehat{\sigma}.$$

Доказательство. Так как \widehat{C} и C являются 1-циклами, то $C' := \widehat{C} + C$ тоже является 1-циклом. Поскольку $\widehat{\sigma} \setminus T = \{\sigma\}$ для любого ребра $\sigma \in K \setminus T$, то $\widehat{C} \setminus T = C \setminus T$. Значит, $C' \setminus T = 0$. Поэтому $C' \subset T$. Тогда из утверждения 1.5.b следует, что $C' = 0$, т. е. $\widehat{C} = C$. \square

Доказательство утверждения 1.5.a. Возьмем оставное дерево T связного графа K . Достаточно доказать, что существует взаимно однозначное соответствие между $H_1(K)$ и множеством $2^{K \setminus T}$ подмножеств ребер из $K \setminus T$. Определим отображения

$$\begin{aligned} \varphi: H_1(K) &\rightarrow 2^{K \setminus T} \quad \text{формулой} \quad \varphi C := C \setminus T, \\ \widehat{\varphi}: 2^{K \setminus T} &\rightarrow H_1(K) \quad \text{формулой} \quad \widehat{\varphi} D := \sum_{\sigma \in D} \widehat{\sigma}. \end{aligned}$$

Поскольку $\varphi \widehat{\sigma} = \{\sigma\}$, то $\varphi \widehat{\varphi} D = D$ для любого $D \subset K \setminus T$. Обратно, для любого $C \in H_1(K)$ имеем $\widehat{\varphi} \varphi C = \widehat{C} = C$, где второе равенство есть лемма 1.6. Таким образом, φ и $\widehat{\varphi}$ являются взаимно однозначными соответствиями. \square

Количество 1-циклов в графе не меняется ни при *подразделении* ребра (рис. 3), ни при *стыковании* ребра. Это можно либо доказать напрямую (использовать для другого доказательства утверждения 1.5.a), либо вывести из утверждения 1.5.a.

Обозначим через \widetilde{K}_n граф, полученный из $K_{n,n}$ удалением всех ребер jj' , $j \in [n]$ (соединяющих вершину j с её «копией» j' в другой доле графа $K_{n,n}$). Например, \widetilde{K}_3 — цикл $12'31'23'$ длины 6. Граф \widetilde{K}_n естественно появляется в лемме 8.5.

Лемма 1.7. Пусть $n \geq 4$.

- (a) Любой 1-цикл в \widetilde{K}_n является суммой нескольких циклов длины 4.
- (b) Любой 1-цикл в \widetilde{K}_n является суммой нескольких циклов $ij' := 12'31'ij'$ для ребер ij' из \widetilde{K}_n таких, что $i, j > 1$ и $(i, j) \neq (3, 2)$.
- (c) Представление из п. (b) единственno.

Доказательство. (a) Простой цикл в \widetilde{K}_n образован l -элементной циклической последовательностью вершин такой, что

- число l четное и больше 2;
- в последовательности чередуются вершины из разных долей;
- внутри каждой отдельной доли вершины не повторяются;
- не существует двух последовательных вершин t и t' .

Предположим, что такой цикл не имеет хорд. Тогда любые две несоседние вершины цикла не являются смежными, т. е. либо находятся в одной доле, либо являются вершинами t и t' . Для любой вершины цикла имеется $\frac{l}{2} - 2$ не соседних с ней по циклу вершин из другой доли. Тогда $\frac{l}{2} - 2 \leq 1$, так что $l \in \{4, 6\}$.

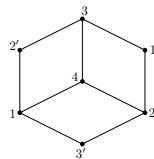


Рис. 1. Цикл длины 6 является суммой трех циклов длины 4

В простом цикле длины 6, не имеющем хорд, любые две противоположные вершины равны m и m' . Следовательно, цикл равен $(m_1, m'_2, m_3, m'_1, m_2, m'_3)$ для некоторых попарно различных m_1, m_2, m_3 . Так как $n \geq 4$, то существует $a \in [n] - \{m_1, m_2, m_3\}$. Тогда цикл равен

$$(m_1, m'_2, m_3, a') + (m_2, m'_3, m_1, a') + (m_3, m'_1, m_2, a'),$$

см. рис. 1. Теперь требуемый результат следует из утверждения 1.5.c'.

(b) Остовным деревом графа \widetilde{K}_n является подграф T , состоящий из простого пути $12'31'$ и ребер $i1', 1j'$ для всех $i, j > 1$. Тогда по лемме 1.6 любой 1-цикл в \widetilde{K}_n является суммой 1-циклов \widehat{ij}' , $ij' \in K_n \setminus T$. \square

Множество $B \subset H_1(K)$ называется **базисом** множества $A \subset H_1(K)$, если каждый 1-цикл из A имеет единственное представление в виде суммы нескольких 1-циклов из B . Например, базисом является множество 1-циклов, определенное в лемме 1.7.b.

Завершим этот параграф описанием соотношений между простейшими 1-циклями (треугольниками в полном графе и циклами длины 4 в полном двудольном графе).

Утверждение 1.8. (a) Для любых вершин a, b, c, d в K_n выполнено $abc + abd + acd + bcd = 0$.

(b) Любое линейное соотношение между циклами длины 3 является суммой нескольких соотношений из (a).

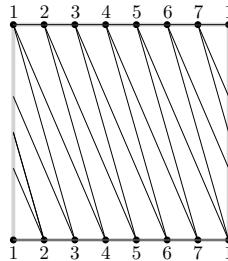


Рис. 2. Триангуляция тора (7-вершинная)

Например,

- соотношение $123 + 124 + 134 + 235 + 245 + 345 = 0$ является суммой соотношений $123 + 124 + 134 + 234 = 0$ и $234 + 235 + 245 + 345 = 0$;
- сумма границ треугольников любой триангуляции сферы или тора (рис. 2) равна 0.

Строго говоря, *линейное соотношение* — это множество циклов длины 3 в K_n такое, что каждое ребро графа K_n содержится в четном числе циклов из этого множества. Поэтому строгая формулировка п. (b) такова (мы отождествляем циклы длины 3 в K_n с 3-элементными подмножествами множества $[n]$).

Пусть $R_1, \dots, R_k \subset [n]$ — такие 3-элементные подмножества, что любое 2-элементное подмножество множества $[n]$ содержится в четном количестве из них. Тогда существуют такие 4-элементные подмножества множества $[n]$, что любое R_i содержит в нечетном количестве из них, а любое другое 3-элементное подмножество множества $[n]$ содержит в четном количестве из них.

В этой строгой формулировке п. (b) эквивалентен утверждению 6.2.b.

Утверждение 1.9. (a) Для любых попарно различных $a, b, c \in [n]$ и различных $u', v' \in [n]'$ выполнено $au'bv' + bu'cv' + cu'av' = 0$.

(b) Любое линейное соотношение между циклами длины 4 в $K_{n,n}$ является суммой нескольких соотношений из (a), и аналогичных соотношений $a'ub'v + b'uc'v + c'ua'v = 0$.

Строго говоря, *линейное соотношение* — это множество циклов длины 4 в $K_{n,n}$ такое, что каждое ребро графа $K_{n,n}$ содержит в четном количестве циклов из этого множества.

Утверждения 1.4 и 1.9 эквивалентны частному случаю задачи 6.5 для $\ell = 2$.

2. СИММЕТРИЧНЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ ЦИКЛЫ И ДРУГИЕ ОБОВЩЕНИЯ

Граф — это пара (V, E) из конечного множества V и множества E , состоящего из двухэлементных подмножеств множества V (называемых «ребрами»).

В этом тексте K — *граф*. Иногда мы обозначаем ребро $\{a, b\}$ коротко через ab .

Напомним, что граф \widetilde{K}_n получен из $K_{n,n}$ удалением всех ребер jj' , $j \in [n]$. Обозначим через $t: \widetilde{K}_n \rightarrow \widetilde{K}_n$ симметрию (инволюцию), переставляющую доли графа, то есть переставляющую j и j' для каждого $j \in [n]$.

Через tQ обозначим набор ребер, симметричный набору Q ребер графа \widetilde{K}_n . Например, $t\widetilde{K}_3 = \widetilde{K}_3$ и $t(12'31'ij') = 1'23'1'i'j$. Назовем набор Q ребер *t-симметричным*, если $tQ = Q$. Например, \widetilde{K}_3 является *t-симметричным*.

Лемма 2.1. Существует взаимно однозначное соответствие между *t-симметричными 1-циклами* в \widetilde{K}_n и *1-циклами* в K_n .

Нужное соответствие получается из отображения $\widetilde{K}_n \rightarrow K_n$, переводящего вершины i и i' графа \widetilde{K}_n в вершину i графа K_n для каждого $i \in [n]$.

Из утверждения 1.3.а и леммы 2.1 вытекает, что количество *t-симметричных 1-циклов* в \widetilde{K}_n равно $2^{\binom{n-1}{2}}$.

Лемма 2.2. (a) Любой *t-симметричный 1-цикл* в \widetilde{K}_n является суммой нескольких из следующих 1-циклов: \widetilde{K}_3 и $Q + tQ$ для циклов Q длины 4.

(b) Множество всех 1-циклов в \widetilde{K}_n имеет базис, состоящий из (*t-симметричного 1-цикла*) \widetilde{K}_3 и пар 1-циклов, взаимно симметричных относительно t .

Набросок доказательства. (a) Возьмем взаимно однозначное соответствие из леммы 2.1. Тогда п. (a) следует из утверждения 1.3.д и из того, что прообразом цикла длины 3 является \widetilde{K}_3 , а прообразом цикла длины 4 является $Q + tQ$ для некоторого цикла Q длины 4.

(b) Возьмем базис, определенный в лемме 1.7.бс. Тогда 1-циклы

$$\widetilde{K}_3 = \widehat{23'}, \quad \widehat{ij'}, \quad \widehat{23'} + \widehat{ji'}, \quad \text{где } i > j > 1 \quad \text{и} \quad (i, j) \neq (3, 2),$$

также образуют базис. Этот базис таков, как требуется в п. (b), поскольку

$$\widehat{23'} + \widehat{ji'} = 1i'j1'32'12'31'23' = 1i'j1'23' = \widehat{ti'j'}$$

□

Пусть задана симметрия (инволюция) $t: K \rightarrow K$, т.е. перестановка множества вершин, для которой

- вершины, соединенные ребром, переходят в вершины соединенные ребром, и
- $t(tv) = v$ для любой вершины v .

Примеры:

- симметрия t графа \widetilde{K}_n , определенная в начале этого параграфа;
- антиподальная симметрия цикла четной длины, отображающая каждую вершину в диаметрально противоположную.

Вершина v называется *неподвижной* (при симметрии t), если $v = tv$. Через tQ обозначим набор ребер, симметричный набору Q ребер графа K . Назовем набор Q ребер *симметричным*, если $tQ = Q$. В частности, Q может быть одним ребром или 1-циклом.

Утверждение 2.3. Пусть для симметрии t связного графа K с V вершинами и E ребрами нет неподвижных вершин. Обозначим через I количество симметричных ребер. Тогда коли-

чество симметричных 1-циклов равно $\begin{cases} 2^{(E-V+2)/2}, & \text{если } I = 0 \\ 2^{(E-V+I)/2}, & \text{если } I > 0 \end{cases}$.

Набросок доказательства. Случай $I = 0$. Говоря нестрого, назовем *фактор-графом* K/t графа K по симметрии t граф, полученный из K «склеиванием» симметричных вершин и симметричных ребер. Строго говоря, вершинами графа K/t являются неупорядоченные пары взаимно симметричных вершин графа K . Ребро в K/t между двумя такими парами проводится, если есть ребро в K между некоторыми вершинами из обеих пар. Например, фактор-графом графа \widetilde{K}_n по симметрии t является граф K_n (ср. с леммой 2.1).

Пусть сначала

(*) ни одна вершина графа K не соединена с двумя взаимно симметричными вершинами.

Тогда граф K/t имеет $V/2$ вершин и $E/2$ ребер. По утверждению 1.5.а в K/t ровно $2^{(E-V)/2+1}$ 1-циклов. Существует «естественное» взаимно однозначное соответствие между симметричными 1-циклами в K и 1-циклами в K/t . Значит, в K столько же симметричных 1-циклов.

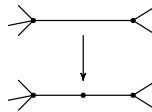


Рис. 3. Подразделение ребра

Сведем общий случай к рассмотренному. Результатом *подразделения* ребра $\sigma = ab$ графа K назовем граф, полученный из K добавлением вершины v_σ , ребер av_σ и $v_\sigma b$, а также удалением ребра σ .

Подразделение ребра не меняет количество 1-циклов. Подразделение двух взаимно симметричных ребер не меняет количество симметричных 1-циклов.

Обозначим через K' граф, полученный из K подразделением каждого ребра. Обозначим через V' и E' количество вершин и ребер в K' соответственно. Поскольку $V' = V + E$ и $E' = 2E$, то $E' - V' = E - V$. Симметрия t' на графе K' совпадает с t на вершинах графа K , и $t'v_\sigma = v_{t\sigma}$ для любого ребра σ из K . Ввиду предыдущего абзаца количества симметричных 1-циклов в K и K' совпадают. Граф K' удовлетворяет условию (*). Следовательно, в нем ровно $2^{(E'-V')/2+1} = 2^{(E-V)/2+1}$ симметричных 1-циклов.

Случай $I > 0$. Докажем в следующем абзаце, что в K существует симметричное оствовное дерево T , содержащее ровно одно симметричное ребро.

Выберем произвольное симметричное ребро τ . Построим T итеративно. Обозначим $T_0 = \{\tau\}$. Если дерево T_i является оствовным, то положим $T = T_i$. Иначе, поскольку K связан, существует вершина v вне T_i , которая соединена ребром σ с некоторой вершиной дерева T_i . Так как $v \neq tv$, то вершины v и tv являются листьями в $T_{i+1} = T_i \cup \{\sigma, t\sigma\}$, поэтому T_{i+1} является деревом. Дерево T не содержит симметричное ребро σ , отличное от τ , поскольку иначе ребра σ , τ и два взаимно симметричных пути от вершин ребра τ до вершин ребра σ образуют 1-цикл в T .

Ввиду симметричности дерева T верно $\hat{t}\hat{\sigma} = \hat{t}\hat{\sigma}$ для любого ребра $\sigma \in K \setminus T$. Возьмем симметричный 1-цикл C в K . Поскольку C и T симметричны, $\sigma \in C \setminus T$ тогда и только тогда, когда $t\sigma \in C \setminus T$.

Возьмем взаимно однозначное соответствие из доказательства утверждения 1.5.а. Ввиду предыдущего абзаца при этом соответствии симметричные 1-циклы в K переходят в симметричные наборы ребер вне T .

Поскольку в T ровно одно симметричное ребро, то вне T ровно $I - 1$ симметричных ребер. Симметричные наборы ребер вне T разбиваются на $I - 1$ одноэлементных наборов и $(E - V + 1 - (I - 1))/2$ пар взаимно симметричных ребер. Таким образом, количество симметричных наборов ребер вне T равно $2^{(I-1)+(E-V+1-(I-1))/2} = 2^{(E-V+I)/2}$. \square

Более продвинутый материал об инволюциях см., например, в [Sk20, §7].

Остаток этого пункта не используется далее.

Набросок сведенияя случая $I = 0$ утверждения 2.3 к случаю $I > 0$. Возьмем произвольную вершину v и добавим симметричное ребро $\{v, tv\}$. Множества симметричных 1-циклов в полученном графе K' и в K совпадают. Для доказательства этого утверждения достаточно проверить, что в K' нет симметричных 1-циклов, содержащих симметричное ребро. Докажем это в следующем абзаце.

В любом связном 1-цикле C есть эйлеров цикл — замкнутый путь, проходящий по всем ребрам 1-цикла C ровно по одному разу. Разобьем вершины симметричного C на два взаимно симметричных множества U и tU . Поскольку при обходе по эйлеровому циклу в C вершина меняет принадлежность множеству U или tU четное число раз, то количество ребер 1-цикла C между U и tU четно. При этом несимметричные ребра между U и tU разбиваются на взаимно симметричные пары. Поэтому количество симметричных ребер между U и tU четно. Значит, связный симметричный 1-цикл не может содержать ровно одно симметричное ребро. \square

Задача 2.4 (целочисленные 1-циклы). * Пусть K — граф с ориентированными ребрами. Расстановка целых чисел на всех ребрах графа называется (симплициальным) целочисленным 1-циклом, если для каждой вершины сумма значений на входящих ребрах равна сумме значений на исходящих ребрах (правило Кирхгофа).

- (a,b) Сформулируйте и докажите аналоги утверждений 1.5.а,б для целочисленных 1-циклов.
- (c) Для данного набора ω ориентаций на ребрах графа K обозначим через $H_1^\omega(K; \mathbb{Z})$ множество целочисленных 1-циклов, с операцией покомпонентной суммы. Для различных наборов ω, ω' ориентаций существует взаимно однозначное соответствие $\varphi: H_1^\omega(K; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1^{\omega'}(K; \mathbb{Z})$ такое, что $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ для всех пар $x, y \in H_1^\omega(K; \mathbb{Z})$ (т. е. группы $H_1(K; \mathbb{Z})$ для различных наборов ориентаций ребер изоморфны).

Задача 2.5 (когомологии). * Пусть на ребрах графа задана некоторая расстановка знаков + или -. Определим на графе следующую операцию: выбираем произвольную вершину и инвертируем знаки у всех ребер, которым она принадлежит.

- (a) Для дерева, применяя описанную выше операцию несколько раз (к различным вершинам), мы можем из любой расстановки знаков получить любую другую.
- (b) Рассмотрим связный граф с V вершинами и E ребрами. Найдите наибольшее количество таких расстановок знаков + или - на ребрах графа, что ни одна из них не может быть получена ни из какой другой описанными выше операциями.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОТСТУПЛЕНИЕ: ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ ГРАФОВ *

В этом параграфе мы приведем конструкции «двумерных» объектов. Формально, эти конструкции не используются далее, ибо излагаются на «одномерном» или «комбинаторном» языке. Но без знакомства с этими конструкциями такой язык может показаться недостаточно естественным.

Возьмем в трехмерном пространстве n прямоугольников XYB_kA_k , $k = 1, \dots, n$, любые два из которых пересекаются только по отрезку XY . Книжкой с n листами называется объединение этих прямоугольников, см. рис. 4 для $n = 3$.

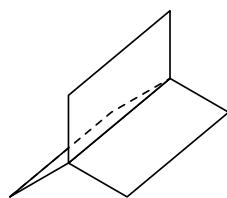


Рис. 4. Книжка с тремя листами

Пример 3.1. Любой граф можно нарисовать без самопересечений на книжке с некоторым количеством листов, зависящим от графа. Более строго, для любого n существует целое число k , а также n точек и $n(n - 1)/2$ несамопересекающихся ломаных на книжке с k листами таких, что

- каждая пара точек соединена ломаной, и
- никакая ломаная не пересекает внутренность другой ломаной.

Построение. Построим нужные точки и ломаные на книжке с n листами. Обозначим через XY отрезок пересечения листов. Поместим вершину V_i на i -ый лист вне отрезка XY , $i \in [n]$. На XY выберем $n(n - 1)/2$ различные точки $A_{\{i,j\}}$, $i, j \in [n]$. Ребро $e_{\{i,j\}}$ изобразим в виде двузвленной ломаной $V_i A_{\{i,j\}} V_j$. Никакое звено ломаной не пересекает внутренность никакого звена другой ломаной, так как либо эти звенья лежат на различных листах, либо они имеют общую вершину. \square

Сначала мы дадим интуитивное определение цилиндра, а затем строгое.

Возьмем вершины a и b в графе K , соединенные ребром. Возьмем прямоугольник-ленточку $aa'b'b$, соответствующую этому ребру. Склейм концевые отрезки ленточек, соответствующие одной и той же вершине, так, чтобы штрихованные буквы склеивались бы со штрихованными. Полученная двумерная фигура называется *цилиндром* над графом K .

Напомним, что \mathbb{R}^d — это d -мерное евклидово пространство (для $d = 2$ и $d = 3$ это обычные плоскость и пространство, которые изучают на уроках геометрии). *Цилиндром* над подмножеством $U \subset \mathbb{R}^d$ называется

$$U \times K_2 := \{(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in U, t \in [0, 1]\}.$$

Например, цилиндры над K_2 , K_3 и K_5 показаны на рис. 5; цилиндр над $K_{3,1}$ показан на рис. 4; цилиндр над $K_{k,1}$ «выглядит» как книжка с k листами.

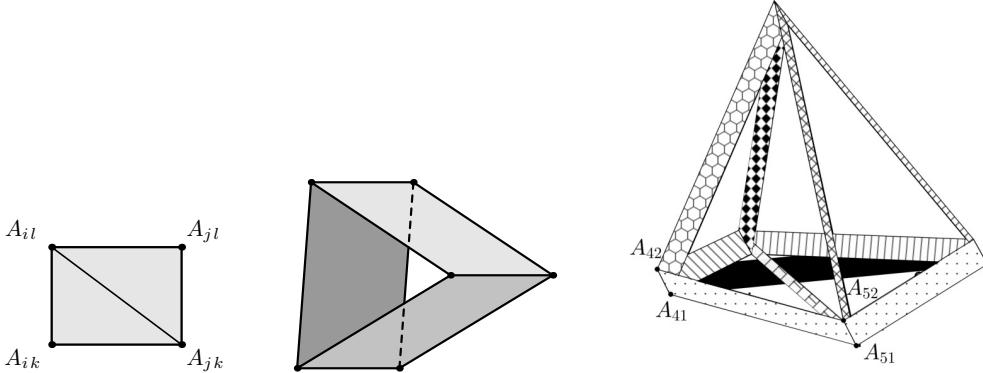


Рис. 5. Цилиндры над K_2 , K_3 , K_5

Пример 3.2. Цилиндр над любым графом «реализуем без самопересечений» в \mathbb{R}^3 .

Набросок построения. Пусть $O, V, A_{11}, \dots, A_{1n}$ — точки в \mathbb{R}^3 , никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Для каждого $p \in [n]$ возьмем точку A_{2p} такую, что $\overrightarrow{OA_{2p}} = \overrightarrow{OV} + \overrightarrow{OA_{1p}}$. Если V достаточно близка к O , то точки A_{jp} , $j \in \{1, 2\}$, $p \in [n]$ — искомые, т. е. объединение параллелограммов $A_{1p}A_{2p}A_{2q}A_{1q}$ дает реализацию цилиндра над K_n в \mathbb{R}^3 . \square

Для подмножеств $U, V \subset \mathbb{R}^d$ их (геометрическим) произведением называется

$$U \times V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2d} : x \in U, y \in V\}.$$

В частности, *квадрат* подмножества $U \subset \mathbb{R}^d$ — это $U^2 = U \times U$. Например, квадрат K_2^2 — это обычный квадрат на плоскости, а квадрат K_3^2 (называемый *тором*) показан на рис. 7, в центре. Изображение квадрата $K_{3,1}^2$ в \mathbb{R}^3 с самопересечениями показано на рис. 6.

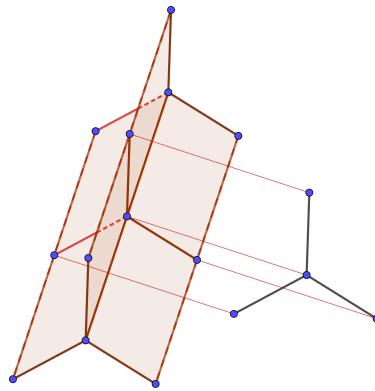


Рис. 6. Изображение квадрата $K_{3,1}^2$ в трехмерном пространстве

Задача 3.3 (загадка). Нарисуйте в \mathbb{R}^3 произведение $K_3 \times K_{3,1}$ без самопересечений.

Замечание 3.4. Иногда термин «граф» используется для понятия «тело графа», определяемого следующим образом. Пусть некоторое подмножество в \mathbb{R}^3 находится во взаимно однозначном соответствии с множеством вершин графа K , причем ни один отрезок, соответствующий какому-либо ребру графа K , не пересекает внутренность никакого другого такого отрезка. *Телом* графа K является объединение этого подмножества и всех таких отрезков.

4. Одномерные циклы в произведении графов

Назовем *конфигурацией* пару жуков (красного и синего), расположенных в вершинах красного и синего графов. Назовем две конфигурации *смежными*, если одна из них может быть получена из другой перемещением одного из жуков вдоль какого-либо (одного) ребра.

Иными словами, рассмотрим множество (конфигурационное пространство) упорядоченных пар (x, y) точек x и y графов K и L (точнее, их тел, см. замечание 3.4), хотя бы одна из которых является вершиной. Это множество является объединением конечного числа отрезков, т. е. телом некоторого графа. Приведем прямое комбинаторное определение этого графа. Для этого вспомните строгое определение графа, данное в начале §2.

Вершинами \square -произведения $K \square L$ графов K и L являются упорядоченные пары (a, b) вершин a графа K и b графа L . Если вершины b и c графа L соединены ребром, то вершины (a, b) и (a, c) графа $K \square L$ соединены ребром, обозначаемым (a, bc) . Если вершины b и c графа K соединены ребром, то вершины (b, a) и (c, a) графа $K \square L$ соединены ребром, обозначаемым (bc, a) . Других ребер в $K \square L$ нет. Обозначим $K^{\square 2} = K \square K$. Дополнительную информацию о произведении $K \square L$ см. в [CPG].

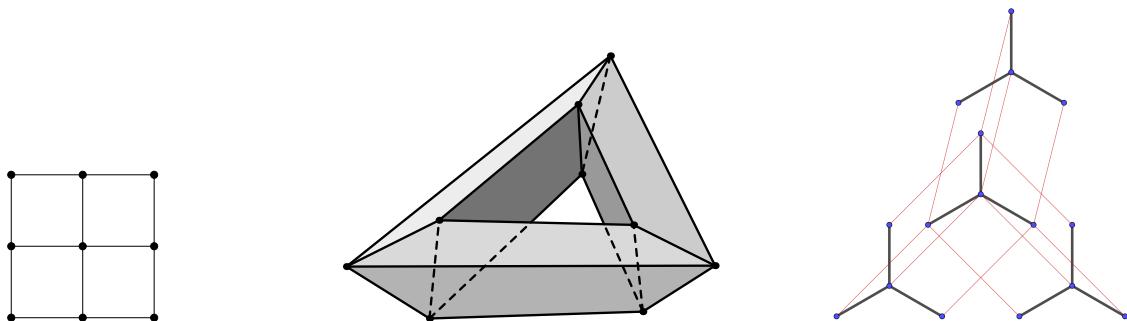


Рис. 7. Слева: $K_{2,1}^{\square 2}$, т. е. сеточный граф 3×3 . В центре: $K_3^{\square 2}$ на торе K_3^2 (границные циклы затянуты серыми четырехугольниками). Справа: $K_{3,1}^{\square 2}$

Например,

- если $K = K_2$ отрезок, то $K^{\square 2}$ — цикл длины 4.
- если $K = K_{2,1}$ путь на трех вершинах, то $K^{\square 2}$ — сеточный граф 3×3 на рис. 7 слева;
- если $K = K_3$ цикл на трех вершинах, то $K^{\square 2}$ — граф на рис. 7 в центре; его можно получить из графа $K_{2,1}^{\square 2}$, добавив ребра между соответствующими вершинами 1-й и 3-й строк, а также 1-го и 3-го столбцов (сравните с получением графа K_3 из пути 123 добавлением ребра 13).
- если $K = K_{3,1}$ триод, то $K^{\square 2}$ — граф на рис. 7 справа.
- вершины графа $K_4^{\square 2}$ — узлы сетки 4×4 ; две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда они находятся в одной строке или в одном столбце.

Границей называется простой цикл

$$ab \square uv := (a, u)(b, u)(b, v)(a, v)$$

для ребер ab и uv в K и L (напомним из §1, что простой цикл обозначается вершинами, через которые он проходит; произведение $ab \times uv$ является прямоугольником, см. §3, а $ab \square uv = \partial(ab \times uv)$ является его границей).

В применении циклы, являющиеся суммой нескольких границ, играют важную роль. Основной результат этого параграфа — теорема Кюннета 4.7 о классификации 1-циклов с точностью до прибавления границ. Остальной материал этого пункта подводит к ее формулировке и доказательству.

Оказывается, любой 1-цикл в $K_{2,1}^{\square 2}$ и в $K_{3,1}^{\square 2}$ является суммой нескольких границ (попробуйте доказать!).

Утверждение 4.1. *Если K и L — деревья, то любой 1-цикл в $K \square L$ является суммой нескольких границ.*

Это доказывается по индукции, используя удаление висячей вершины.

Вот примеры простых циклов в $K^{\square 2}$:

- *диагональные, внедиагональные и антидиагональные* циклы

$$\text{diag}(123) := (1, 1)(1, 2)(2, 2)(2, 3)(3, 3)(3, 1), \quad (1, 2)(1, 3)(2, 3)(2, 1)(3, 1)(3, 2),$$

$$\text{и } (1, 1)(2, 1)(2, 3)(3, 3)(3, 2)(1, 2) \text{ в } K_3^{\square 2};$$

- *левые, правые, диагональные, внедиагональные, и антидиагональные* циклы

$$a \times C := (a, v_1) \dots (a, v_k), \quad C \times a := (v_1, a) \dots (v_k, a),$$

$$\text{diag } C := (v_1, v_1)(v_1, v_2)(v_2, v_2) \dots (v_k, v_k)(v_k, v_1), \quad (v_1, v_2)(v_1, v_3)(v_2, v_3) \dots (v_k, v_1)(v_k, v_2),$$

$$\text{и } (v_1, v_1)(v_2, v_1)(v_2, v_k) \dots (v_k, v_2)(v_1, v_2)$$

для вершины a и непустого простого цикла $C = v_1 \dots v_k$ в K .

Задача 4.2. (a) Диагональный (b) Внедиагональный (c) Антидиагональный цикл является суммой нескольких границ и *симметризованного цикла* $a \times C + C \times a$ для простого цикла C .

Задача 4.3. (a) Никакой левый цикл не является суммой нескольких границ.

(b) Никакой диагональный цикл не является суммой нескольких границ.

(c) Никакой левый цикл не является суммой нескольких диагональных циклов и границ.

Это вытекает из (очевидной) леммы 4.4.

Левой проекцией C_y по модулю 2 для 1-цикла C в $K \square L$ называется множество всех ребер σ в L такое, что имеется нечетное количество вершин a в K таких, что $(a, \sigma) \in C$. *Правая проекция* C_x по модулю 2 определяется аналогично.

Лемма 4.4. *Левая (и правая) проекция по модулю 2 любой границы (и, следовательно, любой суммы границ) пуста.*

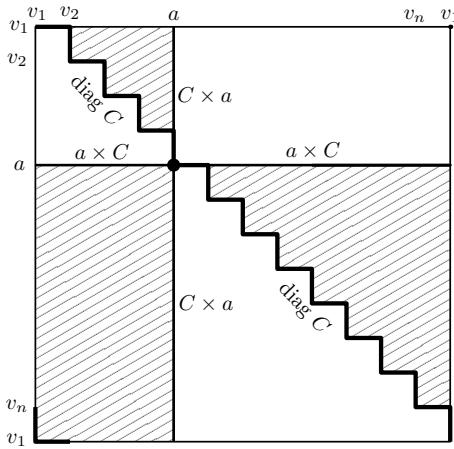


Рис. 8. Наглядное обоснование утверждения 4.2.а в случае, когда a — вершина цикла C : сумма заштрихованных границ и симметризированного цикла равна диагональному циклу

Количество 1-циклов по модулю границ (или с точностью до прибавления границ) — это максимальное количество 1-циклов в наборе 1-циклов, ни один из которых не является суммой каких-либо других 1-циклов этого набора и нескольких границ.

Два 1-цикла C, C' в $K \square L$ называются *гомологичными* (или сравнимыми по модулю границ), если $C + C'$ является суммой нескольких границ. Обозначение: $C \sim C'$. Количество 1-циклов по модулю границ есть количество классов гомологичности 1-циклов.

Задача 4.5. Найдите количество классов гомологичности 1-циклов в

- (a) $K_3^{\square 2}$; (b) $K_{2,2}^{\square 2}$; (c) $K_{2,3}^{\square 2}$; (d) $K_4^{\square 2}$.

Для некоторых пунктов этой задачи полезна теорема Кюннета 4.7.б.

Утверждение 4.6. Пусть T — дерево.

(a') Любой 1-цикл в $K \square T$ является суммой правого цикла и нескольких границ.

(a) Для любых 1-цикла C в $K \square T$ и вершины a в T

(a1) существует единственный 1-цикл C_K в K такой, что $C \sim C_K \times a$.

(a2) $C \sim C_x \times a$.

(b) Количество классов гомологичности 1-циклов в $K \square T$ равно количеству 1-циклов в K .

Это доказывается индукцией по количеству вершин в T , используя удаление висячей вершины. Кроме того, (b) и существование в (a1) следуют из (a2); единственность в (a1) следует из леммы 4.4 (о пустоте проекции границы).

Теорема 4.7 (Кюннет). Пусть графы K и L связны.

(a') Любой 1-цикл в $K \square L$ является суммой правого цикла, левого цикла и нескольких границ.

(a) Для любых 1-цикла C в $K \square L$ и вершин a, b в K, L

(a1) существуют единственные 1-циклы C_K и C_L в K и L такие, что $C \sim C_K \times b + a \times C_L$.

(a2) $C \sim C_x \times b + a \times C_y$.

(b) Количество классов гомологичности 1-циклов в $K \square L$ равно произведению количества 1-циклов в K на количество 1-циклов в L .

Набросок доказательства. По следующей лемме 4.8, если $Z_x = Z_y = 0$, то $Z \sim 0$. Применяя это к $Z = C + C_x \times b + a \times C_y$, получаем (a2).

Часть (b) и существование в (a1) следуют из (a2); единственность в (a1) следует из леммы 4.4 (о пустоте проекции границы). \square

Лемма 4.8. Если графы K и L связны, Z является 1-циклом в $K \square L$ и $Z_x = 0$, то $Z \sim a \times Z_y$ для любой вершины a в K .

Набросок доказательства. Докажем лемму индукцией по числу пар $\{(\sigma, v), (\sigma, u)\}$ ребер в Z , проецируемых слева на одно и то же ребро в K . Назовем эту индукцию главной. В следующем абзаце докажем базу главной индукции, когда все ребра в Z имеют вид (v, τ) . Эту базу докажем индукцией по количеству вершин b в K таких, что $Z \cap (b \times L) \neq \emptyset$. Назовем эту индукцию вложенной.

База вложенной индукции: если таких вершин нет, то Z пуст; если такая вершина a одна, то $Z = a \times Z_y$, и лемма доказана. Для шага вложенной индукции возьмем две такие вершины b, c , отличные от a ; возьмем путь $b = v_1, \dots, v_k = c$ в K и заменим Z на

$$Z' := Z + v_1 v_2 \square Z_y + \dots + v_{k-1} v_k \square Z_y.$$

Для Z' верно предположение вложенной индукции, поэтому $Z \sim Z' \sim a \times Z'_y = a \times Z_y$.

Для шага главной индукции возьмем такую пару $\{(\sigma, v), (\sigma, u)\}$, возьмем путь $v = v_1 \dots v_k = u$ в L и заменим Z на

$$Z' := Z + \sigma \square v_1 v_2 + \dots + \sigma \square v_{k-1} v_k.$$

Для Z' верно предположение главной индукции, поэтому $Z \sim Z' \sim a \times Z'_y = a \times Z_y$. \square

Набросок доказательства утверждения 4.2. Начнем с графа $K_3^{\square 2}$. Можно считать, что $C = 12 \dots k$.

(a) Выполнены равенства

$$\text{diag}(123) = 1 \times K_3 + K_3 \times 1 + 12 \square 23 + 12 \square 31 + 23 \square 31$$

и

$$\text{diag } C = 1 \times C + C \times 1 + \sum_{i,j \in [k], i < j} i(i+1) \square j(j+1), \quad \text{где } k+1 := 1.$$

(b) Внедиагональный цикл в $K_3^{\square 2}$ равен

$$1 \times K_3 + K_3 \times 1 + 12 \square 31 + 31 \square 12.$$

(c) Антидиагональный цикл в $K_3^{\square 2}$ равен

$$1 \times K_3 + K_3 \times 1 + 23 \square 31 + 31 \square 23 + 31 \square 31.$$

\square

Ответы к задаче 4.5: (a) 2^2 ; (b) 2^2 ; (c) 2^4 ; (d) 2^6 .

5. СИММЕТРИЧНЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ ЦИКЛЫ В КВАДРАТЕ ГРАФА *

Мы рассматриваем симметрию (инволюцию) графа $K^{\square 2}$, переставляющую сомножители (т. е. переставляющую точки (x, y) и (y, x)), и соответствующую симметрию на 1-циклах. О простейшем применении симметричных 1-циклов см. [Sk18, §1.6], [Sk, §1.6].

Теорема 5.1. (a) Любой симметричный 1-цикл в $K^{\square 2}$ является суммой нескольких симметризованных циклов $C \times a + a \times C$ и нескольких границ. (Следовательно, он равен сумме нескольких диагональных циклов и нескольких границ; обратите внимание, что диагональный цикл «симметричен по модулю границ».)

(b) Для связного графа K формула

$$C \mapsto [C \times a + a \times C]$$

определяет взаимно однозначное соответствие между 1-циклами в K и симметричными 1-циклами в $K^{\square 2}$ по модулю границ (здесь $[x]$ обозначает класс гомологичности 1-цикла x).

Обратное соответствие задается формулой

$$[Z] \mapsto Z_x = Z_y.$$

Набросок доказательства теоремы 5.1. П.(а) получается применением к каждой компоненте связности графа K следующего своего «связного» аналога: любой симметричный 1-цикл Z в $K^{\square 2}$ для связного графа K является суммой симметризованного цикла $a \times C + C \times a$ и нескольких границ. Докажем это утверждение в следующем абзаце. П.(б) следует из этого утверждения.

Положим $b = a$ в части (а2) теоремы Кюннета 4.7. Получим, что $Z \sim Z_x \times a + a \times Z_y$. Поскольку Z симметричен, то $Z_x = Z_y$. \square

Очевидно, что в теореме 5.1.а сумма границ является симметричной. Лемма 5.2 дает более сильный результат, утверждающий, что она является суммой симметричных границ и 1-циклов особого вида.

Симметризованной границей называется сумма нескольких сумм $B + B'$ для некоторых взаимно симметричных пар границ B, B' .

Лемма 5.2. *Если сумма границ в $K^{\square 2}$ симметрична, то она является суммой симметричных границ и симметризованной границы.*

Набросок доказательства. (См. полное немного другое доказательство в [Bo].)

Достаточно доказать лемму для связного графа K . Достаточно доказать, что если сумма попарно различных границ является симметричным 1-циклом, то или сумма равна нулю, или найдутся два взаимно симметричных слагаемых, или найдется симметричная граница. Рассмотрим аналогичное утверждение, в котором $K^{\square 2}$ заменен на $K \square T \bigcup_{T \square T} T \square K$ и T — дерево.

Оно доказывается индукцией по числу вершин дерева T , используя удаление листа. Для того, чтобы свести лемму к этому аналогичному утверждению, используется равенство $\sum_{i,j} \sigma_i \square \tau_j = 0$ для любых двух простых циклов в K , имеющих последовательные ребра $\sigma_1 \dots \sigma_k$ и $\tau_1 \dots \tau_\ell$ (см. утверждение 7.3.а). Используя это равенство, заменим данную сумму границ на равную ей сумму, не содержащую слагаемые $\sigma \square \tau$, соответствующие ребрам σ, τ вне остовного дерева T графа K . \square

Утверждение 5.3. *Для связного графа K с V вершинами и E ребрами количество симметричных 1-циклов в $K^{\square 2}$ равно $2^{VE - \binom{V}{2}}$.*

Набросок доказательства. Заменим «диагональные» вершины (a, a) графа $K^{\square 2}$ на ребра, так чтобы ни одна вершина в новом графе не была неподвижна (см. рис 9). Строго говоря, по графу $K^{\square 2}$ построим граф $K^{\circ 2}$ следующим образом: заменим каждую вершину (a, a) на две вершины (a, \circ) и (\circ, a) , соединенные ребром (символу \circ не придается отдельного смысла). Каждую вершину (a, b) , которая соединена с (a, a) в $K^{\square 2}$, соединим с (a, \circ) в $K^{\circ 2}$. Каждую вершину (b, a) , которая соединена с (a, a) в $K^{\square 2}$, соединим с (\circ, a) в $K^{\circ 2}$. Симметрия графа $K^{\circ 2}$ представляет местами вершины (a, b) , где a или b могут совпадать с \circ .



Рис. 9. Слева: $K_{2,1}^{\square 2}$, т. е. сеточный граф 3×3 . Справа: $K_{2,1}^{\circ 2}$

В графе $K^{\circ 2}$ ровно $V^2 + V$ вершин и $2VE + V$ ребер. Из этих ребер ровно V инвариантны. Тогда по утверждению 2.3 в $K^{\circ 2}$ ровно $2^{VE - \binom{V}{2}}$ симметричных 1-циклов. Поэтому достаточно доказать, что существует взаимно однозначное соответствие между симметричными 1-циклами в $K^{\circ 2}$ и симметричными 1-циклами в $K^{\square 2}$.

Для этого определим *стягивание «диагональных» ребер*, т.е. отображение $f: V(K^{\circ 2}) \rightarrow V(K^{\square 2})$, сопоставив вершине (a, b) вершину (a, a) , если $b = \circ$; (b, b) , если $a = \circ$ и (a, b) иначе. Отображение f задает взаимно однозначное соответствие между «внедиагональными» ребрами графа $K^{\circ 2}$ и ребрами графа $K^{\square 2}$. Следовательно, оно задает взаимно однозначное соответствие \hat{f} между наборами «внедиагональных» ребер графа $K^{\circ 2}$ и наборами ребер графа $K^{\square 2}$.

Возьмем симметричный 1-цикл C в графе $K^{\circ 2}$ и вершину (a, b) в $K^{\square 2}$. Если $a \neq b$, то (a, b) принадлежит тем ребрам множества $\hat{f}C$, прообразы которых смежны с вершиной (a, b) в $K^{\circ 2}$. Иначе (a, a) принадлежит тем ребрам множества $\hat{f}C$, прообразы которых смежны с вершинами (a, \circ) и (\circ, a) в $K^{\circ 2}$. Так как C является 1-циклом, количества указанных в обоих случаях ребер четны. Поэтому $\hat{f}C$ является 1-циклом в $K^{\square 2}$.

Поскольку $t\hat{f}\sigma = \hat{f}t\sigma$ для любого «внедиагонального» ребра σ в $K^{\circ 2}$, то $\hat{f}C$ является симметричным.

Осталось заметить, что любой 1-цикл в $K^{\circ 2}$ однозначно определяется своим набором «внедиагональных» ребер. \square

Следующее (как и K^2 , определенный в §8) является теоретико-графовым аналогом множества размещений. Рассмотрим двух жуков на K , как описано в начале §4, которым теперь запрещено находиться в одной вершине. Иными словами, рассмотрим множество (конфигурационное пространство) упорядоченных пар (x, y) точек графа K (точнее, его тела, см. замечание 3.4), хотя бы одна из которых является вершиной, а другая не лежит внутри ребра с концом в этой вершине. Это множество является объединением конечного числа отрезков, т. е. телом некоторого графа. Вот прямое комбинаторное определение этого графа.

Вершинами графа $K^{\square 2}$ являются упорядоченные пары различных вершин графа K . Вершины графа $K^{\square 2}$ соединены ребром в $K^{\square 2}$, если они соединены ребром в $K^{\circ 2}$. Обозначение с нижним подчеркиванием для графа $K^{\square 2}$ (как и для K^2 в §8) мотивировано обозначением для количества размещений (нижней степени, убывающего факториала). Мы просим читателя отличать $K^{\square 2}$ от $K^{\square 2}$ (и далее K^2 от K^2).

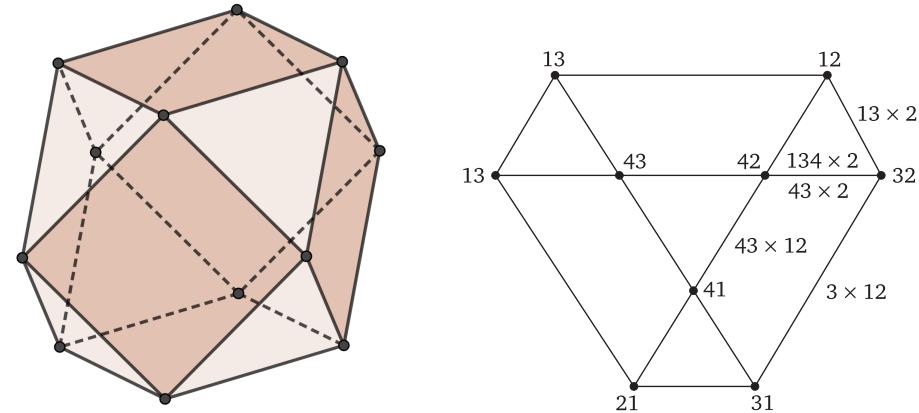


Рис. 10. Слева: кубооктаэдр; объединение ребер есть $K_4^{\square 2}$ (выделены три из шести граний); четырехугольные грани образуют K_4^2 (см. §7). Справа: то же с некоторыми пояснениями; на рисунке не показана невидимая часть, проекция которой получается из изображенной проекции поворотом на $\pi/3$

Например,

- $K_{2,1}^{\square 2}$ — объединение двух непересекающихся копий графа $K_{2,1}$;
- $K_3^{\square 2}$ — цикл на 6 вершинах;
- $K_{3,1}^{\square 2}$ — цикл на 12 вершинах;
- $K_4^{\square 2}$ — объединение ребер кубооктаэдра, см. рис. 10.

Задача 5.4. Найдите количество 1-циклов в $K^{\square 2}$ для связного графа K с V вершинами и E ребрами. (Указание: примените утверждение 1.5.а и его обобщение для несвязных графов.)

Задача 5.5. Найдите количество 1-циклов в $K^{\square 2}$ по модулю границ (содержащихся) в $K^{\square 2}$ (т. е. по модулю границ, соответствующих парам несмежных ребер), для $K =$

- (a) K_3 ; (b) $K_{2,2}$; (c) $K_{2,3}$; (d) K_4 ; (e) $K_{3,3}$; (f) K_5 .

(По поводу обобщения на произвольные графы см. [FH10].)

Далее изучается выражимость одних 1-циклов в $K^{\square 2}$ через другие.

Например, следующая гипотеза является версией утверждения 4.2.b с заменой $K^{\square 2}$ на $K^{\square 2}$.

Гипотеза 5.6. В $K^{\square 2}$ никакой внедиагональный цикл не является суммой границ и симметризованных циклов.

Поскольку при $a \in C$ симметризованный цикл $C \times a + a \times C$ заведомо не лежит в $K^{\square 2}$, то осмыслено в гипотезе 5.6 брать только торы, где $a \notin C$.

Триодическим циклом называется цикл

$$(1, 3)(1, 1')(1, 2)(1', 2)(3, 2)(3, 1') \dots \text{ в } K_{3,1}^{\square 2},$$

где точками обозначена часть, симметричная выписанной части (т. е. полученная заменой (x, y) на (y, x)). Триодическим циклом также называется аналогичный цикл, соответствующий $K_{3,1}$ -подграфу графа K .

Задача 5.7. (a) Триодический цикл не является суммой никаких границ в $K^{\square 2}$.

(b) В $K^{\square 2}$ любой ли симметризованный цикл является суммой внедиагональных циклов, триодических циклов, и границ?

(c) В $K_4^{\square 2}$ любой ли внедиагональный цикл является суммой некоторых симметризованных циклов, триодических циклов, и границ?

(d) В $(K_5 \setminus (45))^{\square 2}$ выразите циклы $4 \times K_3$ и $\{4, 5\} \times K_3$ через внедиагональные и триодические циклы по модулю границ (ср. [Ga23]).

Гипотеза 5.8. В $K^{\square 2}$

(a) любой 1-цикл является суммой левых циклов, правых циклов, внедиагональных циклов, триодических циклов, и границ.

(b) любой симметричный 1-цикл является суммой внедиагональных циклов, триодических циклов, и границ (см. доказательство в [Bo]).

(c) любой симметричный 1-цикл является суммой «симметричных внедиагональных циклов», триодических циклов, и симметризованных границ.

Ответы и указания к задаче 5.5. (a-d) Если множество границ в $K^{\square 2}$ имеет нулевую сумму, то это множество пусто. См. утверждения 7.1 и 8.2.abc.

(e), (f) Сумма всех границ в $K^{\square 2}$ равна нулю. Это единственный непустой набор границ в $K^{\square 2}$, сумма которых равна нулю. См. утверждения 7.1, 8.3 и 8.4.

Ответы: (a) 2^1 ; (b) 2^1 ; (c) 2^5 ; (d) 2^7 ; (e) 2^8 ; (f) 2^{12} . □

6. ЦИКЛЫ В ГИПЕРГРАФАХ *

В этом параграфе мы приведем «двумерные» обобщения результатов из §1, а также их применения.

Назовем 2-циклом множество C , состоящее из 3-элементных подмножеств (называемых «графами») множества $[n]$, такое, что каждое 2-элементное подмножество множества $[n]$ содержится в четном количестве подмножеств множества C . Например, пустое множество является 2-циклом.

Приведём ещё один пример 2-цикла. Для 4-элементного подмножества $A \subset [n]$ назовем *тетраэдром* T_A множество всех 3-элементных подмножеств множества A . Другими словами, для попарно различных $a, b, c, d \in [n]$ определим *тетраэдр*

$$T_{\{a,b,c,d\}} := \{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}.$$

Очевидно, что любой тетраэдр является 2-циклом.

Сравните следующие утверждения 6.1, 6.2 и 6.3 с аналогичными утверждениями 1.2, 1.3 и 1.8 соответственно.

Утверждение 6.1. (a) Сумма 2-циклов является 2-циклом.

(b) Множество граней является 2-циклом тогда и только тогда, когда сумма границ этих граней нулевая.

Многомерные циклы в гиперграфах появляются, в частности, как соотношения между 1-циклами в графе, см. утверждение 6.1.b.

Утверждение 6.2. (a) Количество 2-циклов для $[n]$ равно $2^{\binom{n-1}{3}}$.

(b) Любой 2-цикл является суммой нескольких тетраэдров.

Набросок доказательства. Доказательство аналогично доказательствам соответствующих пунктов утверждения 1.3.

(b) Достаточно показать, что произвольный 2-цикл C равен сумме

$$\widehat{C} := \sum_{\{i,j,k\} \in C, i,j,k < n} T_{\{i,j,k,n\}}$$

тетраэдров $T_{\{i,j,k,n\}}$ по всем 3-элементным подмножествам $\{i, j, k\} \in C$, не содержащим n . Каждая грань в $C + \widehat{C}$ содержит n . Заметим, что если все грани 2-цикла имеют общую вершину, то этот 2-цикл пустой. Поэтому $C + \widehat{C} = 0$, т. е. $C = \widehat{C}$.

(a) Доказывается построением биекции между множеством 2-циклов в $[n]$ и множеством подмножеств двумерных граней в $[n - 1]$ аналогично утверждению 1.5.a, что по сути является единственностью разложения на суммы тетраэдров вида $T_{\{i,j,k,n\}}$ в п. (b). \square

Задача 6.3. (a) Для любого 5-элементного подмножества $A \subset [n]$ выполнено $\sum_{j \in A} T_{A-\{j\}} = 0$.

(b) Любое линейное соотношение между тетраэдрами является суммой нескольких соотношений из п. (a).

Строгая формулировка п. (b) аналогична строгой формулировке утверждения 1.8.b и получается из последней заменой чисел 2, 3, 4 на числа 3, 4, 5, соответственно (мы отождествляем тетраэдры в $[n]$ с 4-элементными подмножествами $[n]$). П. (b) является многомерным аналогом утверждения 6.2.b; доказательство аналогично.

Задача 6.4 (загадка). Придумайте и докажите многомерные аналоги утверждений 6.1-6.3.

О связи следующей задачи с 2-циклами см. замечание 6.6.

Задача 6.5. Назовем *рядом* подмножество множества $[n]^\ell$ векторов длины ℓ , получаемое фиксацией всех координат, кроме одной. Определим *ладейный цикл* как подмножество множества $[n]^\ell$, содержащее четное количество вершин в каждом ряду. Например, пустое множество является ладейным циклом.

Назовем *параллелепипедом* подмножество $P_1 \times \dots \times P_\ell \subset [n]^\ell$, где P_i суть 2-элементные подмножества множества $[n]$. Очевидно, что любой параллелепипед является ладейным циклом.

(a) Сумма ладейных циклов является ладейным циклом.

(b) Если в ладейном цикле нет элементов из $[n - 1]^\ell$, то этот ладейный цикл пустой.

(c) Любой ладейный цикл является суммой нескольких параллелепипедов.

(d) Сколько имеется ладейных циклов в $[n]^\ell$?

(e) Для любых попарно различных $a, b, c \in [n]$ и параллелепипеда $P \subset [n]^{\ell-1}$ выполнено $P \times \{a, b\} + P \times \{b, c\} + P \times \{c, a\} = 0$.

(f) Любое линейное соотношение между параллелепипедами в $[n]^\ell$ является суммой нескольких соотношений из (e), и соотношений, получаемых из (e) перестановками координат. (Строгая формулировка аналогична строгим формулировкам утверждений 1.9.b и 6.3.b.)

Подсказка. Сначала разберите случай $\ell = 2$, см. утверждения 1.4 и 1.9.

Указание. Ребро $ab' \in K_{n,n}$ соответствует паре $(a, b) \in [n]^2$. Вершина $a \in [n]$ соответствует ряду $x = a$, вершина $b' \in [n]'$ соответствует ряду $y = b$. Ребро, содержащее вершину, соответствует элементу множества $[n]^2$, принадлежащему ряду. Тогда 1-циклы в $K_{n,n}$ соответствуют ладейным циклам в $[n]^2$. В частности, циклы длины 4 соответствуют параллелепипедам, (которые при $\ell = 2$ можно назвать параллелограммами).

Назовем *2-гиперграфом* (двумерным гиперграфом, или 3-однородным гиперграфом) пару (V, F) из конечного множества V и множества F , состоящего из нескольких 3-элементных подмножеств множества V . Назовем *гранью* элемент множества F . Назовем *ребром* 2-элементное подмножество, содержащееся в некоторой грани. Назовем *2-циклом* (симплексиальным, по модулю 2) множество C граней такое, что каждое ребро содержится в четном количестве граней из C . Назовем 2-гиперграф *связным*, если связан граф, являющийся объединением его ребер.

Замечание 6.6. Существуют 2-гиперграфы и взаимно однозначное соответствие между множеством его граней и $[n]^3$, которое даёт взаимно однозначное соответствие между 2-циклами и ладейными циклами (см. задачу 6.5).

В качестве вершин 2-гиперграфа возьмем $[3] \times [n]$. Границы образуются тройками вершин из различных строк. Взаимно однозначное соответствие переводит грань $\{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$ в вершину $(a, b, c) \in [n]^3$. Например, оно переводит октаэдр в 2-гиперграфе в параллелепипед в $[n]^3$.

Задача 6.7. Существуют два связных 2-гиперграфа, имеющие одинаковое количество вершин, ребер и граней, но разное количество 2-циклов. (Ср. утверждения 1.5.a и 6.9.)

Задача. В парламенте из n человек имеется несколько (попарно различных по составу) комиссий по три человека в каждой. Известно, что если два человека находятся в некоторой комиссии, то множество из этих двух человек содержит ровно в двух комиссиях. Такие две комиссии называются *смежными*. Известно также, что для любых двух человек найдется цепочка комиссий, такая, что первый входит в первую комиссию, а второй — в последнюю, причем соседние комиссии в цепочке смежны. Докажите, что число комиссий не меньше $2n - 4$.

Вот переформулировка и решение на языке гиперграфов. Произвольный 2-гиперграф называется *гранесвязным*, если любые две грани можно соединить цепочкой граней, в которой любые две соседние грани имеют общее ребро.

Утверждение 6.8 (экстремальное свойство эйлеровой характеристики поверхностей). (a) Пусть в гранесвязном 2-гиперграфе с V вершинами и F гранями к каждому ребру примыкает ровно две грани. Тогда $F \leq 2V - 4$.

(Ввиду $2E = 3F$ это равносильно неравенству $V - E + F \leq 2$, где E — количество ребер.)

(b) Пусть в гранесвязном 2-гиперграфе с V вершинами, E ребрами и F гранями к каждому ребру примыкает не более двух граней, а к некоторому — ровно одна грань. Тогда $V - E + F \leq 1$.

*Набросок доказательства.*² П. (a) доказывается аналогично п. (b) или сводится к нему. Докажем п. (b). В его предположениях сумма любого непустого набора границ граней непуста. Так как гиперграф гранесвязен, то объединение его ребер образует связный граф. Поэтому ввиду утверждения 1.5.a выполнено $2^F \leq 2^{E-V+1}$. □

²Это рассуждение можно считать алгебраической формализацией геометрической идеи, изложенной в [Sk20, доказательство утверждения 2.4.1d'], прямая реализация которой непроста [Sk20, §5.1, 5.8].

Утверждение 6.9. Дан 2-гиперграф с V вершинами, E ребрами и F гранями. Назовем два 1-цикла гомологичными, если их сумма является суммой границ некоторых граней (ср. с определением перед задачей 4.5). Обозначим через b_0 количество компонент связности, через 2^{b_1} количество классов гомологичности 1-циклов, через 2^{b_2} количество 2-циклов. Тогда $b_0 - b_1 + b_2 = V - E + F$.

Набросок доказательства. Число 2^{b_1} равно отношению количества 2^{E-V+b_0} всех 1-циклов (утверждение 1.5.а) к количеству 2^{F-b_2} тех 1-циклов, которые гомологичны нулю (т. е. равны сумме границ некоторых граней).³ \square

Решения некоторых пунктов задачи 6.5. (с) Для $a \in [n-1]^\ell$ обозначим через $P(a) := \{n, a_1\} \times \dots \times \{n, a_\ell\}$ параллелепипед с противоположными вершинами a и (n, \dots, n) . Достаточно доказать, что любой ладейный цикл $C \subset [n]^\ell$ равен сумме \widehat{C} параллелепипедов $P(a)$ по всем $a \in C \cap [n-1]^\ell$. Сумма $C + \widehat{C}$ является ладейным циклом. Так как $P(a) \cap [n-1]^\ell = \{a\}$, то $(C + \widehat{C}) \cap [n-1]^\ell = \emptyset$. По п. (б) имеем $C + \widehat{C} = \emptyset$, т. е. $C = \widehat{C}$.

(f) Любой параллелепипед P с некоторым $P_i \subset [n-1]$ является суммой нескольких заданных соотношений и двух параллелепипедов, полученных из P заменой на n одного из двух элементов в P_i . Значит, в каждом из этих двух параллелепипедов количество пар P_j , не содержащих n , меньше, чем в P . Следовательно, любое соотношение между параллелепипедами является суммой нескольких заданных соотношений и соотношения $P(a_1) + \dots + P(a_s) = 0$, для некоторых попарно различных $a_1, \dots, a_s \in [n-1]^\ell$. В последнем соотношении нет слагаемых, поскольку

$$\emptyset = (P(a_1) + \dots + P(a_s)) \cap [n-1]^\ell = \{a_1, \dots, a_s\}.$$

Здесь второе равенство выполняется в силу $P(a) \cap [n-1]^\ell = \{a\}$. \square

Набросок доказательства утверждения 6.7. Возьмем центрально-симметричную триангуляцию T квадрата, настолько мелкую, что никакой треугольник, примыкающий к границе квадрата, не пересекает симметричный ему треугольник. Обозначим через T' гиперграф, полученный из гиперграфа T склейкой центрально-симметричных вершин на границе квадрата, а также центрально-симметричных ребер на границе квадрата (T' — триангуляция *проективной плоскости*). В гиперграфе T нет ненулевых 2-циклов. В гиперграфе T' множество всех граней образует ненулевой 2-цикл.

У гиперграфов T и T' одинаковы количества F граней и эйлеровы характеристики $V - E + F$.

(1) К гиперграфу можно добавить грань, имеющую с ним ровно одну общую вершину.

При этом количество вершин увеличится на 2, ребер — на 3, граней — на 1.

(2) К гиперграфу можно добавить грань, имеющую с ним ровно одно общее ребро.

При этом количество вершин увеличится на 1, ребер — на 2, граней — на 1.

Эти операции не меняют количества 2-циклов.

Применяя операции (1) к тому из гиперграфов T, T' , в котором меньше ребер, и такое же число операций (2) к оставшемуся, можно добиться равенства количеств ребер (сохраняя равенство количеств граней и эйлеровых характеристик). Получим нужные гиперграфы.

\square

7. ДВУМЕРНЫЕ ЦИКЛЫ В ПРОИЗВЕДЕНИИ ГРАФОВ

(Комбинаторным) произведением графов K и L называется

$$K \times L := \{(\sigma, \tau) : \sigma, \tau \text{ являются ребрами графа } K, L \text{ соответственно}\}.$$

Это обозначение не является общеприятным. Обычно так обозначают декартово произведение графов (см. §3). Клетки (α, β) и (σ, τ) в $K \times L$ называются *смежными*, если

- либо $\alpha = \sigma$ и β, τ имеют общую вершину,

³Утверждение 6.9 достаточно доказать для связных 2-гиперграфов. Однако приведенное доказательство (без такой редукции) интересно тем, что обобщается на многомерный случай [Sk20, Утверждение 10.6.8].

- либо $\beta = \tau$ и α, σ имеют общую вершину
(т. е. если они имеют общее ребро в $K \square L$).

Если склеить смежные клетки по их «общим ребрам» в $K \square L$, получится геометрическое произведение, обсуждаемое в §3.

Квадратом графа K называется $K^2 := K \times K$. **Клеточным 2-циклом** (в K^2) называется подмножество $C \subset K^2$ такое, что для каждой вершины a и ребра β графа K

- имеется четное количество ребер α в K таких, что $\alpha \ni a$ и $(\alpha, \beta) \in C$, а также
- имеется четное количество ребер α в K таких, что $\alpha \ni a$ и $(\beta, \alpha) \in C$.

Иными словами, $C \subset K^2$ является клеточным 2-циклом, если к любому ребру «примыкает» четное число клеток из C .

Утверждение 7.1. Следующие условия равносильны для подмножества $C \subset K^2$

- C является клеточным 2-циклом;
- для каждого ребра σ в K оба множества («вертикальное сечение» и «горизонтальное сечение»)

$$C_{\sigma,\cdot} := \{\tau : (\sigma, \tau) \in C\} \quad \text{и} \quad C_{\cdot,\sigma} := \{\tau : (\tau, \sigma) \in C\}$$

являются 1-циклами в K ;

- сумма границ $\sigma \square \tau$ по всем $(\sigma, \tau) \in C$ равна нулю.

Доказательство. Обозначим $\delta v := \{\tau : \tau \ni v\}$. Условие (i) равносильно условию

(i') $|C \cap (\delta v \times \sigma)|$ и $|C \cap (\sigma \times \delta v)|$ четны для любого ребра σ и вершины v графа K .

Доказательство равносильности (ii) \Leftrightarrow (i'). Условие (ii) равносильно условию

(ii') $|C_{\cdot,\sigma} \cap \delta v|$ и $|C_{\sigma,\cdot} \cap \delta v|$ четны для любого ребра σ и вершины v графа K .

Последнее условие равносильно условию (i') ввиду равенств

$$|C \cap (\delta v \times \sigma)| = |C_{\cdot,\sigma} \cap \delta v| \quad \text{и} \quad |C \cap (\sigma \times \delta v)| = |C_{\sigma,\cdot} \cap \delta v|$$

для любого ребра σ и вершины v графа K .

Доказательство равносильности (iii) \Leftrightarrow (i'). Обозначим через S сумму границ $\sigma \square \tau$ по всем $(\sigma, \tau) \in C$. Условие (iii) равносильно условию (i') ввиду равносильностей

$$(v, \sigma) \notin S \Leftrightarrow |C \cap (\delta v \times \sigma)| \text{ четно} \quad \text{и} \quad (\sigma, v) \notin S \Leftrightarrow |C \cap (\sigma \times \delta v)| \text{ четно}$$

для любого ребра σ и вершины v графа K . \square

Далее под клеточным 2-циклом будем понимать подмножество квадрата K^2 , удовлетворяющее свойству 7.1(ii).

Утверждение 7.2. Сумма по модулю 2 клеточных 2-циклов является клеточным 2-циклом.

Тором в K^2 называется произведение простых циклов в K .

Утверждение 7.3. (a) Тор является клеточным 2-циклом.

(b) В торе имеется ровно один непустой клеточный 2-цикл.

Доказательство. Возьмем простые циклы Z_1, Z_2 в K и тор $T := Z_1 \times Z_2 \subset K^2$.

(a) Для любого ребра σ графа K множество $T_{\sigma,\cdot}$ либо равно Z_2 , либо пусто; множество $T_{\cdot,\sigma}$ либо равно Z_1 , либо пусто.

(b) Обозначим через C непустой клеточный 2-цикл в торе T . Тогда найдутся ребра $\sigma \in Z_1$, $\tau \in Z_2$ такие, что $(\sigma, \tau) \in C$. Выберем произвольное $(\alpha, \beta) \in T$. Так как сечение $C_{\cdot,\tau}$ непусто, то $C_{\cdot,\tau} = Z_1$. В частности, $(\alpha, \tau) \in C$. Так как сечение $C_{\alpha,\cdot}$ непусто, то $C_{\alpha,\cdot} = Z_2$. В частности, $(\alpha, \beta) \in C$. Следовательно, $C = T$. \square

Утверждение 7.4 (ср. утверждение 1.5.b). Для дерева $T \subset K$ любой клеточный 2-цикл, содержащийся в

(a) T^2 ; (b) $\bar{T} := T \times K \cup K \times T$

является пустым.

Доказательство. (а) Пусть C — клеточный 2-цикл в T^2 . Поскольку T — дерево, из утверждения 1.5.b следует, что $C_{\sigma,\cdot} = 0$ для любого ребра σ дерева T . И потому $C = 0$.

(б) Пусть C — клеточный 2-цикл в \bar{T} . Поскольку T — дерево, из утверждения 1.5.b следует, что $C_{\sigma,\cdot} = 0$ для любого ребра σ графа $K \setminus T$. И потому $C \subset T \times K$. Поскольку T — дерево, из утверждения 1.5.b следует, что $C_{\cdot,\sigma} = 0$ для любого ребра σ графа K . И потому $C = 0$. \square

Нетривиальные примеры клеточных 2-циклов приведены в утверждении 8.3.

Обозначим через $H_2(K^2)$ множество всех клеточных 2-циклов в K^2 , с операцией сложения.

Утверждение 7.5. (а) Любой клеточный 2-цикл в K^2 является суммой нескольких торов.

(б) Для связного графа K с V вершинами и E ребрами количество клеточных 2-циклов в K^2 равно $2^{(E-V+1)^2}$.

Формулировки этого утверждения и следующей леммы, а также их доказательства, аналогичны формулировкам и доказательствам утверждения 1.5.a и леммы 1.6.

Пусть T — оставное дерево в связном графе K и $\sigma \in K \setminus T$ — ребро. Обозначим через $\hat{\sigma}$ простой цикл в K , образованный ребром σ и простым путем в T , соединяющим концы ребра σ .

Лемма 7.6. Для любых оставного дерева T в связном графе K и клеточного 2-цикла C в K^2

$$C = \hat{C} := \sum_{(\sigma,\tau) \in C \setminus \bar{T}} \hat{\sigma} \times \hat{\tau}.$$

Доказательство утверждения 7.5. П. (а) следует из леммы 7.6, примененной к каждой компоненте связности графа K .

(б) Ввиду того, что $K^2 \setminus \bar{T} = (K \setminus T)^2$, достаточно доказать, что существует взаимно однозначное соответствие между $H_2(K^2)$ и множеством $2^{K^2 \setminus \bar{T}}$ подмножеств ребер из $K^2 \setminus \bar{T}$. Определим отображения

$$\begin{aligned} \varphi: H_2(K^2) &\rightarrow 2^{K^2 \setminus \bar{T}} \quad \text{формулой} \quad \varphi C := C \setminus \bar{T}, \\ \widehat{\varphi}: 2^{K^2 \setminus \bar{T}} &\rightarrow H_2(K^2) \quad \text{формулой} \quad \widehat{\varphi} D := \sum_{(\sigma,\tau) \in D} \hat{\sigma} \times \hat{\tau}. \end{aligned}$$

Поскольку $\varphi(\hat{\sigma} \times \hat{\tau}) = \{(\sigma,\tau)\}$, то $\varphi \widehat{\varphi} D = D$ для любого $D \subset K^2 \setminus \bar{T}$. Обратно, для любого $C \in H_2(K^2)$ имеем $\widehat{\varphi} \varphi C = \hat{C} = C$, где второе равенство есть лемма 7.6. Таким образом, φ и $\widehat{\varphi}$ являются взаимно однозначными соответствиями. \square

Теорема 7.7 (Кюннет). Для элементов C_1, \dots, C_q в $H_1(K)$ обозначим

$$B = B(C_1, \dots, C_q) := \{C_i \times C_j : i, j \in [q]\}.$$

(а) Существует базис C_1, \dots, C_q в $H_1(K)$ такой, что $B(C_1, \dots, C_q)$ — базис в $H_2(K^2)$. (Базис множества клеточных 2-циклов определяется аналогично случаю 1-циклов.)

(б) Если C_1, \dots, C_q — базис в $H_1(K)$, то $B(C_1, \dots, C_q)$ — базис в $H_2(K^2)$.

(T. e. $H_2(K^2) \cong H_1(K) \otimes H_1(K)$.)

Набросок доказательства. (а) В качестве базиса C_1, \dots, C_q можно взять множество всех 1-циклов $\hat{\sigma}$, где $\sigma \in K \setminus T$. Из леммы 7.6 следует, что B составляет систему порождающих в $H_2(K^2)$. Можно проверить, что B — базис.

(б) В следующих двух абзацах мы докажем, что каждый клеточный 2-цикл в K^2 есть сумма некоторых клеточных 2-циклов из B и что такое представление единственно, соответственно.

Каждый из простых циклов Z_1, Z_2 представляется в виде суммы некоторых 1-циклов из C_1, \dots, C_q . Тогда каждый тор $Z_1 \times Z_2 \subset K^2$ представим в виде суммы некоторых клеточных 2-циклов из B . По утверждению 7.5.a то же справедливо для произвольного клеточного 2-цикла.

Обозначим через N количество компонент связности графа K . Аналогично утверждению 1.5.a, $|H_1(K)| = 2^{E-V+N}$. Поскольку C_1, \dots, C_q — базис в $H_1(K)$, то $2^q = |H_1(K)|$, значит $q = E-V+N$. Следовательно, $|B| = q^2 = (E-V+N)^2$. Обобщая утверждение 7.5.b для произвольного графа

K , получаем $|H_2(K^2)| = 2^{(E-V+N)^2}$. Последнее значение совпадает с числом линейных комбинаций клеточных 2-циклов из B . Поэтому представление единственno. \square

8. ДВУМЕРНЫЕ ЦИКЛЫ ВО ВЗРЕЗАННОМ КВАДРАТЕ ГРАФА *

Говоря нестрого (ср. §3), *врезанный квадрат* графа K — множество упорядоченных пар (x, y) точек графа K таких, что x, y не принадлежат соседним ребрам. Это множество можно представить в виде объединения прямоугольников. Строго говоря, **комбинаторным врезанным квадратом** графа K называется

$$K^2 := \{(\sigma, \tau) : \sigma, \tau \text{ — несмежные ребра графа } K\}.$$

Замечание 8.1. (a) Врезанный квадрат и его обобщения имеют многочисленные приложения, в частности, для алгоритма распознавания реализуемости гиперграфов в многомерных евклидовых пространствах, см. обзоры [Sk06, Sk18].

(b) Подмножество $K^2 \subset K^2$ меньше, чем K^2 , поэтому иногда его легче нарисовать. Например, $K_2^2 = K_3^2 = K_{n,1}^2 = \emptyset$.

(c) Склейм смежные клетки вдоль их «общего ребра». Тогда комбинаторные врезанные квадраты пути на 5 вершинах, цикла на 5 вершинах, графа K_4 , графа $K_{3,3}$, и графа K_5 «выглядят как» несвязное объединение двух дисков, кольцо, кубооктаэдр без треугольных граней (рис. 10), сфера с четырьмя ручками, и сфера с шестью ручками соответственно. (Для $K = K_{3,3}$ и $K = K_5$ можно доказать, что K^2 есть связная ориентируемая двумерная поверхность, и применить теорему о классификации двумерных поверхностей; см. подробности в [Sa91, текст после 3.4.1].)

(d) Из этого пункта далее используются только определение комбинаторного врезанного квадрата и лемма 8.5.b.

Например, произведение любых вершинно-непересекающихся циклов в K является клеточным 2-циклом в K^2 (по утверждению 7.3.a).

Задача 8.2. Любой клеточный 2-цикл в K^2 пуст для

- (a) простого цикла K ; (b) $K = K_{n,2}$; (c) $K = K_4$;
- (d) колеса K , т. е. для графа с множеством $\{0\} \cup [n]$ вершин, и ребрами $\{0, 1\}, \{0, j\}$ и $\{j, j+1\}$ для $j \in [n-1]$.

Набросок доказательства n. (a-c). Пусть C — клеточный 2-цикл в K^2 . Для любого ребра σ графа K сечение $C_{\sigma, \cdot}$ является подмножеством

- (a) графа-пути $K - \sigma$;
- (b) графа $K_{n,1} \cong K - v$ для некоторой вершины $v \in \sigma$;
- (c) множества $\{\tau\}$, где τ — единственное несмежное ребро с σ .

Следовательно, $C_{\sigma, \cdot}$ — подмножество дерева. Тогда по утверждению 1.5.b $C_{\sigma, \cdot} = 0$. Тогда $C = 0$.

Набросок доказательства n. (d). Пусть C — клеточный 2-цикл в K^2 .

Так как и $C_{0,j, \cdot}$, и $C_{\cdot,0,j}$ — подмножества графа-пути $K - 0 - j$ для любого $j \in [n]$, то $C_{0,j, \cdot} = C_{\cdot,0,j} = 0$ для любого $j \in [n]$. Тогда $C \subset (K - 0)^2$ для графа-цикла $K - 0$, что сводит доказательство к п. (a).

(Это решение обобщает п. (c), так как K_4 является колесом при $n = 3$.) \square

Утверждение 8.3. (a) Подмножество $K_{3,3}^2$ в $K_{3,3}^2$ является клеточным 2-циклом.

(b) Подмножество K_5^2 в K_5^2 является клеточным 2-циклом.

Доказательство. Положим $C := K_{3,3}^2$ ($C := K_5^2$). Для произвольного ребра σ графа $K_{3,3}$ (K_5) каждое из множеств $C_{\sigma, \cdot}$ и $C_{\cdot, \sigma}$ есть цикл длины 4 (длины 3). \square

Задача 8.4. (a) В $K_{3,3}^2$ имеется ровно один непустой клеточный 2-цикл.

(b) В K_5^2 имеется ровно один непустой клеточный 2-цикл.

Набросок доказательства п. (а). Пусть C — непустой клеточный 2-цикл в $K_{3,3}^2$. Тогда найдется пара несмежных ребер σ, τ такая, что $(\sigma, \tau) \in C$. Следовательно, $\tau \in C_{\sigma,..}$. Выберем произвольную $(\alpha, \beta) \in K_{3,3}^2$. Для любых двух ребер σ, α в $K_{3,3}$ существует единственное ребро γ , такое что γ не смежно ни с σ , ни с α . Любое сечение клеточного 2-цикла C либо пусто, либо является циклом длины 4. Так как сечение $C_{\sigma,..}$ непусто, то $\gamma \in C_{\sigma,..}$, а потому $(\sigma, \gamma) \in C$. Так как сечение $C_{\cdot, \gamma}$ непусто, то $\alpha \in C_{\cdot, \gamma}$, а потому $(\alpha, \gamma) \in C$. Так как сечение $C_{\alpha,..}$ непусто, то $\beta \in C_{\alpha,..}$, а потому $(\alpha, \beta) \in C$. \square

Представления клеточного 2-цикла $K_{3,3}^2$ (K_5^2) в виде суммы нескольких торов можно получить из утверждения 7.5.а. Поскольку в графе $K_{3,3}$ (K_5) нет двух непустых вершинно-непересекающихся циклов, то этот клеточный 2-цикл не является суммой произведений вершинно-непересекающихся циклов.

Лемма 8.5. (а) Существует взаимно однозначное соответствие между $K_{n,n}^2$ и \widetilde{K}_n^2 , сохраняющее смежность клеток.

(б) Существует взаимно однозначное соответствие $H_2(K_{n,n}^2) \rightarrow H_2(\widetilde{K}_n^2)$.

Набросок доказательства. (а) Определим отображение $f: K_{n,n}^2 \rightarrow K_{n,n}^2$ формулой

$$f(\sigma_1\sigma'_2, \tau_1\tau'_2) := (\sigma_1\tau'_1, \sigma_2\tau'_2).$$

(Напомним, что для $a, b \in [n]$ через ab' мы обозначаем ребро, соединяющее вершины a и b' .) Оно является взаимно однозначным соответствием, так как $f^2 = \text{id}$. Докажем в следующем абзаце, что f сохраняет смежность.

Рассмотрим пару смежных клеток (σ, α) и (τ, β) . По условию смежности они имеют общее ребро. Без ограничения общности, будем считать, что $\alpha = \beta$. По условию смежности ребра σ и τ имеют общую вершину. Тогда либо $\sigma_1 = \tau_1$, либо $\sigma_2 = \tau_2$. В обоих случаях клетки $f(\sigma, \alpha)$ и $f(\tau, \beta)$ смежны.

Следующие условия эквивалентны для ребер $\sigma, \tau \in K_{n,n}$:

- $(\sigma, \tau) \in K_{n,n}^2$;
- σ и τ несмежны;
- $\sigma_1 \neq \tau_1$ и $\sigma_2 \neq \tau_2$;
- $f(\sigma, \tau) \in \widetilde{K}_n^2$.

Тогда сужение отображения f на $K_{n,n}^2$ является взаимно однозначным соответствием между $K_{n,n}^2$ и \widetilde{K}_n^2 .

(б) Взаимно однозначное соответствие g из п. (а) переводит клеточные 2-циклы в клеточные 2-циклы, поскольку сохраняет смежность. Тогда оно индуцирует отображение $\widehat{g}: H_2(K_{n,n}^2) \rightarrow H_2(\widetilde{K}_n^2)$. Отображение \widehat{g} является взаимно однозначным соответствием, поскольку g является таковым. \square

Замечание 8.6. (а) Пусть дан набор квадратов с ориентированными сторонами. По разбиению этих сторон на пары построим поверхность склейкой сторон в каждой паре. Будем говорить, что два квадрата *смежны при разбиении*, если какие-то их стороны принадлежат одной паре. Оказывается, что имеются два таких набора из одинакового числа квадратов и два их разбиения, при которых

- построенные по этим разбиениям поверхности «различны» (т.е. не гомеоморфны), но
- квадраты *одинаково смежны* (т.е. можно так занумеровать квадраты первого набора и квадраты второго набора, что квадраты k и l в одном наборе смежны тогда и только тогда, когда квадраты k и l в другом наборе смежны).

(b) Такие разбиения строятся, например, при помощи леммы 8.5.a. По ней «тела» клеточных 2-циклов $K_{n,n}^2$ и \widetilde{K}_n^2 (ср. замечание 3.4) получены склейкой одинакового числа одинаково смежных квадратов. (Эти тела получены из $K_{n,n}^{\square 2}$ и $\widetilde{K}_n^{\square 2}$ «заклейкой» каждой границы квадратом.) В следующих двух абзацах мы объясним, почему эти тела различны для $n = 3$.

Геометрически, тела клеточных 2-циклов \widetilde{K}_3^2 и $K_{3,3}^2$ являются тором и сферой с четырьмя ручками соответственно (см. замечание 8.1.c).

Обосновать предыдущее предложение не так просто, но эти тела можно различить алгебраически. Достаточно посмотреть на инвариант тел — количество 1-циклов по модулю границ в $\widetilde{K}_3^{\square 2}$ и в $K_{3,3}^{\square 2}$. В $\widetilde{K}_3^{\square 2}$ четыре 1-цикла по модулю границ (воспользуйтесь теоремой Кюннета 4.7.b), в $K_{3,3}^{\square 2}$ — 256 (см. ответ на задачу 5.5.e').

(c) По лемме 8.5.b и утверждению 7.5.b в $K_{n,n}^2$ ровно $2^{(n^2-3n+1)^2}$ клеточных 2-циклов. (Ср. загадки 9.5.b, 9.9.d.)

9. СИММЕТРИЧНЫЕ ДВУМЕРНЫЕ ЦИКЛЫ В КВАДРАТЕ ГРАФА *

Рассмотрим симметрию (инволюцию) на K^2 , переставляющую компоненты (т. е. переставляющую точки (x, y) и (y, x)), и соответствующее отображение на клеточных 2-циклах.

Утверждение 9.1. (a) Для любых простых циклов $Q, R \in K$ симметризованный тор $Q \times R + R \times Q$ является симметричным клеточным 2-циклом.

(b) Сумма по модулю 2 симметричных клеточных 2-циклов является симметричным клеточным 2-циклом.

(c) Существует граф и симметричный клеточный 2-цикл в квадрате этого графа, не являющийся суммой нескольких симметризованных торов.

Набросок доказательства. (a) Обозначим $C := Q \times R + R \times Q$. Симметризованный тор C является клеточным 2-циклом по утверждениям 7.2 и 7.3. Пусть $(\sigma, \tau) \in C$. Тогда $(\sigma, \tau) \in Q \times R$ или $(\sigma, \tau) \in R \times Q$, но не оба одновременно. Тогда $(\tau, \sigma) \in R \times Q$ или $(\tau, \sigma) \in Q \times R$ соответственно, но не оба одновременно. Следовательно, $(\tau, \sigma) \in C$.

(c) Пример: граф K_3 и клеточный 2-цикл \widetilde{K}_3^2 .

Доказательство. Для любого ребра $\sigma \in K_3$ имеем $(\sigma, \sigma) \in \widetilde{K}_3^2$. Обозначим через C произвольную сумму нескольких симметризованных торов в K^2 . Для любого ребра $\sigma \in K$ имеем $(\sigma, \sigma) \notin C$. Поэтому \widetilde{K}_3^2 не является суммой симметризованных торов. \square

Утверждение 9.2. (a) Любой симметричный клеточный 2-цикл в K^2 является суммой нескольких симметризованных торов и квадратов простых циклов.

(b) Для связного графа K с V вершинами и E ребрами обозначим $q = E - V + 1$. Тогда количество симметричных клеточных 2-циклов в K^2 равно $2^{q(q+1)/2}$.

Лемма 9.3. Для любых остовного дерева T в связном графе K и симметричного клеточного 2-цикла $C \in K^2$

$$C = \sum_{\substack{\{\sigma, \tau\} \\ (\sigma, \tau) \in C \setminus \bar{T} \\ \sigma \neq \tau}} (\widehat{\sigma} \times \widehat{\tau} + \widehat{\tau} \times \widehat{\sigma}) + \sum_{\substack{\sigma \\ (\sigma, \sigma) \in C \setminus \bar{T}}} \widehat{\sigma} \times \widehat{\sigma},$$

где $\widehat{\sigma}$ определено после утверждений 1.5 и 7.5.

Лемма 9.3 следует из леммы 7.6, симметричности клеточного 2-цикла C и симметричности множества \bar{T} .

Набросок доказательства утверждения 9.2. П. (a) следует из леммы 9.3, примененной к каждой компоненте связности графа K .

(b) Возьмем взаимно однозначное соответствие из доказательства утверждения 7.5.b. Ввиду леммы 9.3 при этом соответствии симметричные клеточные 2-циклы в K^2 переходят в симметричные наборы клеток вне \bar{T} . Симметричные наборы клеток вне \bar{T} разбиваются на q одноэлементных наборов и $\binom{q}{2}$ пар взаимно симметричных клеток. Таким образом, количество симметричных наборов клеток вне \bar{T} равно $2^{q+\binom{q}{2}}$. (Ср. с доказательством утверждения 2.3.) \square

Утверждение 9.4. Для элементов C_1, \dots, C_q в $H_1(K)$ обозначим

$$B' = B'(C_1, \dots, C_q) := \{C_i \times C_j + C_j \times C_i, C_i \times C_i : i \neq j, i, j \in [q]\}.$$

(a) Существует базис C_1, \dots, C_q в $H_1(K)$ такой, что $B'(C_1, \dots, C_q)$ – базис в множестве симметричных клеточных 2-циклов в K^2 .

(b) Если C_1, \dots, C_q – базис в $H_1(K)$, то $B'(C_1, \dots, C_q)$ – базис в множестве симметричных клеточных 2-циклов в K^2 .

Набросок доказательства. (a) В качестве базиса C_1, \dots, C_q можно взять множество всех 1-циклов $\hat{\sigma}$, где $\sigma \in K \setminus T$. Из леммы 9.3 следует, что B' составляет систему порождающих в множестве симметричных клеточных 2-циклов. Можно проверить, что B' – базис.

(b) Обозначим через B базис в $H_2(K^2)$, полученный из теоремы Кюннета 7.7.b по базису C_1, \dots, C_q . Возьмем симметричный клеточный 2-цикл C и рассмотрим его представление в виде суммы некоторых элементов из B . Клеточный 2-цикл C симметричный. Поэтому если $C_i \times C_j$ встречается в этом представлении, то в нем встречается и $C_j \times C_i$. Значит, C представим в виде суммы некоторых клеточных 2-циклов из B' .

Единственность представления в виде суммы некоторых элементов из B' следует из единственности представления в виде суммы некоторых элементов из B . \square

Задача 9.5. (a) Любой симметричный клеточный 2-цикл, содержащийся в K^2 , является суммой нескольких симметризованных торов (лежащих в $K^2 \supset K^2$).

(b) (загадка) Сколько имеется симметричных клеточных 2-циклов в $K_{n,n}^2$?

Доказательство п. (a). Поскольку $K^2 \subset K^2$, то по лемме 9.3 любой симметричный клеточный 2-цикл в K^2 является суммой нескольких симметризованных торов и нескольких квадратов простых циклов. Так как в K^2 нет клеток (σ, σ) ни для какого $\sigma \in K$, то в указанной сумме имеются только симметризованные торы. \square

Симметрия $t: \widetilde{K}_n \rightarrow \widetilde{K}_n$ определена перед леммой 2.1, и симметрия $(t \times t): \widetilde{K}_n^2 \rightarrow \widetilde{K}_n^2$ такова, что $(t \times t)(x, y) := (tx, ty)$.

Утверждение 9.6. (a) Взаимно однозначное соответствие из леммы 8.5.b отображает клеточные 2-циклы в $K_{n,n}^2$, переставляемые симметрией, в клеточные 2-циклы в \widetilde{K}_n^2 , переставляемые симметрией $(t \times t)$.

(b) Существует взаимно однозначное соответствие между симметричными клеточными 2-циклами $K_{n,n}^2$ и $(t \times t)$ -симметричными клеточными 2-циклами в \widetilde{K}_n^2 .

Доказательство. (a) Обозначим симметрию на K^2 через s , а взаимно однозначное соответствие из леммы 8.5.b через f . Достаточно доказать, что для любой клетки $\alpha \in K_{n,n}^2$ выполнено $f(s\alpha) = (t \times t)f(\alpha)$. Это верно, поскольку

$$f(s(\sigma_1\sigma'_2, \tau_1\tau'_2)) = f(\tau_1\tau'_2, \sigma_1\sigma'_2) = (\tau_1\sigma'_1, \tau_2\sigma'_2) = (t \times t)(\sigma_1\tau'_1, \sigma_2\tau'_2) = (t \times t)f(\sigma_1\sigma'_2, \tau_1\tau'_2).$$

П. (b) следует из п. (a) и леммы 8.5.b. \square

Лемма 9.7. (a) Любой $(t \times t)$ -симметричный клеточный 2-цикл в \widetilde{K}_n^2 является суммой нескольких из следующих:

- $(t \times t)$ -симметризованные торы $Q \times R + tQ \times tR$ для циклов Q и R длины 4 в \widetilde{K}_n ;

- \widetilde{K}_3^2 .

(b) Количество $(t \times t)$ -симметричных клеточных 2-циклов в \widetilde{K}_n^2 равно $2^{\binom{q+2}{2}}$, где $q = \frac{n^2-3n}{2}$.

Набросок доказательства. (а) Для $n < 4$ доказательство тривиально. Возьмем $(t \times t)$ -симметричный клеточный 2-цикл C . По теореме Кюннета 7.7.а он равен некоторой сумме произведений, $C = C_1 \times D_1 + \dots + C_k \times D_k$. По лемме 2.2.а разложим 1-циклы C_i и D_i для любого $i \in [k]$ в суммы нескольких из следующих 1-циклов: \widetilde{K}_3 и $Q + tQ$ для некоторых циклов Q длины 4. Получим, что C является суммой некоторых из следующих 2-циклов:

$$(Q + tQ) \times (P + tP), \quad \widetilde{K}_3 \times (P + tP), \quad (Q + tQ) \times \widetilde{K}_3 \quad \text{и} \quad \widetilde{K}_3^2$$

для некоторых циклов Q, P длины 4. Докажем, что первые три из этих клеточных 2-циклов представимы в виде суммы $(t \times t)$ -симметризованных торов.

Первый: $(Q + tQ) \times (P + tP) = (Q \times P + tQ \times tP) + (tQ \times P + Q \times tP)$.

Второй:

$$\widetilde{K}_3 \times (P + tP) = \widetilde{K}_3 \times P + t\widetilde{K}_3 \times tP = (A_1 + A_2 + A_3) \times P + (tA_1 + tA_2 + tA_3) \times tP = \sum_{i=1}^3 (A_i \times P + tA_i \times tP),$$

где \widetilde{K}_3 представлен в виде суммы трех циклов $A_i, i \in [3]$ длины 4, см. рис. 1.

Третий преобразуется аналогично второму.

(б) Возьмем t -симметричный базис в $H_1(\widetilde{K}_n)$ из леммы 2.2.б. Обозначим его через B . По теореме Кюннета 7.7.б следующие клеточные 2-циклы составляют базис в $H_2(\widetilde{K}_n^2)$:

$$Q \times P, \quad \widetilde{K}_3 \times P, \quad Q \times \widetilde{K}_3 \quad \text{и} \quad \widetilde{K}_3^2,$$

где Q, P — всевозможные элементы базиса B , не равные \widetilde{K}_3 . Поскольку B является t -симметричным, то полученный базис в $H_2(\widetilde{K}_n^2)$ является $(t \times t)$ -симметричным. Значит, следующие клеточные 2-циклы составляют базис множества всех $(t \times t)$ -симметричных клеточных 2-циклов в \widetilde{K}_n^2 :

$$Q \times P + tQ \times tP, \quad \widetilde{K}_3 \times (P + tP), \quad (Q + tQ) \times \widetilde{K}_3 \quad \text{и} \quad \widetilde{K}_3^2.$$

Всего элементов в этом базисе ровно $\binom{q+2}{2}$. Поэтому количество $(t \times t)$ -симметричных клеточных 2-циклов в \widetilde{K}_n^2 равно $2^{\binom{q+2}{2}}$. \square

Решение загадки 9.5.b. По утверждению 9.6.б. ответ на загадку тот же, что и в лемме 9.7.б. \square

Теорема 9.8. (а) Любой симметричный клеточный 2-цикл в $K_{n,n}^2$ является суммой нескольких из следующих:

- симметризованные торы $Q \times R + R \times Q$ для вершинно-непересекающихся циклов Q, R длины 4 в $K_{n,n}$;
- комбинаторный взрезанный квадрат $K_{3,3}^2$ подграфа $K_{3,3}$ графа $K_{n,n}$.

(б) Любой клеточный 2-цикл в K^2 является суммой нескольких произведений вершинно-непересекающихся циклов, и нескольких комбинаторных взрезанных квадратов подграфов, гомеоморфных графу K_5 или $K_{3,3}$.

Набросок доказательства п. (а). Возьмем взаимно однозначное соответствие из утверждения 9.6.б. По лемме 9.7.а, так как $(t \times t)$ -симметризованные торы и \widetilde{K}_3^2 порождают все $(t \times t)$ -симметричные клеточные 2-циклы в \widetilde{K}_n^2 , то их прообразы порождают все симметричные клеточные 2-циклы в $K_{n,n}^2$. Осталось проверить, что

- прообразом $(t \times t)$ -симметризованного тора для циклов длины 4, является симметризованный тор T для циклов длины 4 (последние циклы вершинно-непересекающиеся, так как T лежит в K^2);

- прообразом тора \widetilde{K}_3^2 является $K_{3,3}^2$ (ср. замечание 8.6.ab). \square

Доказательство 9.8.b можно найти в [SS23].

Задача 9.9. * (а) Следующее утверждение [Sa91, 3.4.2] неверно, даже для связных графов: существует клеточный 2-цикл C в K^2 такой, что любой клеточный 2-цикл в K^2 является суммой нескольких из следующих клеточных 2-циклов: C и произведения вершинно-непересекающихся циклов.

(б) (нерешенная задача) Верно ли утверждение из п. (а) для 3-связных графов?

(с) (нерешенная задача) Верен ли аналог теоремы 9.8.a с заменой графа $K_{n,n}$ на граф K_n и подграфа $K_{3,3}$ графа $K_{n,n}$ на подграф (гомеоморфный) K_5 графа K_n ?

(д) (загадка) Сколько имеется клеточных 2-циклов в K^2 для связного графа K с V вершинами и E ребрами (используйте дополнительные данные о графе, если нужно)?

Подсказки. (а) Возьмите дизъюнктное объединение двух копий графа K_5 . Сделайте это объединение связным, соединив две копии ребром.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [Ab00] * A.D. Abrams. Configuration spaces of braid groups of graphs, PhD thesis, UC Berkeley (2000)
- [Bo] E. Бордачева. Симметричные 1-циклы во взрезанном квадрате графа, https://drive.google.com/drive/folders/1qV-bpEjheUHvh1On_wv0X0-fULf9dw4m.
- [CPG] https://ru.wikipedia.org/wiki/Прямое_произведение_графов
- [FH10] M. Farber, E. Hanbury. Topology of Configuration Space of Two Particles on a Graph, II. Algebr. Geom. Topol. 10 (2010) 2203–2227. arXiv:1005.2300.
- [Ga23] T. Garaev, On drawing K_5 minus an edge in the plane, arXiv:2303.14503.
- [HC19] * C. Herbert Clemens. Two-Dimensional Geometries. A Problem-Solving Approach, Amer. Math. Soc., 2019.
- [Kn18] * B. Knudsen. CONFIGURATION SPACES IN ALGEBRAIC TOPOLOGY, arXiv:1803.11165.
- [MS17] T. Maciazek, A. Sawicki. Homology groups for particles on one-connected graphs J. Math. Phys. 58, 062103 (2017). arXiv:1606.03414.
- [Sa91] K. S. Sarkaria. A one-dimensional Whitney trick and Kuratowski's graph planarity criterion, Israel J. Math. 73 (1991), 79–89. <http://kssarkaria.org/docs/One-dimensional.pdf>.
- [SC] 35-я Летняя конференция Международного математического Турнира городов, <https://turgor.ru/lktg/2023/>
- [Sk06] * A. Skopenkov, Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces, London Math. Soc. Lect. Notes, 347 (2008) 248–342. arXiv:math/0604045.
- [Sk14] * A. Скопенков, Реализуемость гиперграфов и неотъемлемая зацепленность, Мат. Просвещение, 32 (2024), 125–159. arXiv:1402.0658.
- [Sk18] * A. Скопенков, Инварианты изображений графов на плоскости, Мат. Просвещение, 31 (2023), 74–127. arXiv:1805.10237.
- [Sk20] * A. Скопенков, Алгебраическая топология с геометрической точки зрения, Москва, МЦНМО, 2020 (2е издание). Часть книги: <http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf>
- [Sk] * A. Скопенков. Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения, <http://www.mccme.ru/circles/oim/algord.pdf>.
- [SS23] A. Skopenkov and O. Styrt, Embeddability of join powers and minimal rank of partial matrices, arXiv:2305.06339.
- [Va92] * V. A. Vassiliev. Complements of discriminants of smooth maps: Topology and applications, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992 (рус. перевод: В. А. Васильев, Топология дополнений к дискриминантам, Фазис, Москва, 1997).
- [ZSS] * Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки к профессии Сборник под редакцией А. Заславского, А. Скопенкова и М. Скопенкова. Изд-во МЦНМО, 2018. <http://www.mccme.ru/circles/oim/materials/sturm.pdf>.