Инварианты.

Нельзя ведь доказывать чувственным восприятием или пальцем.

Аристотель.

Задача 1. а) Хулиган Ваня порвал стенгазету на 11 частей. Некоторые из получившихся кусков он снова порвал на 11 частей, и так далее. Могло ли в некоторый момент получиться ровно 2003 куска?
б) А если каждый кусок рвался на 4 или 10 частей?

Задача 2. а) Волк и семеро козлят встали в один ряд и играют в чехарду: каждую секунду двое из них, стоящие через одного, могут, прыгнув, поменяться местами. Может ли оказаться так, что они стоят в обратном порядке?
б) А если в чехарду играют Али-баба и сорок разбойников?

Задача 3. У числа $9^{99} = 9 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 9$ (99 раз) вычислили сумму цифр. У полученного числа опять вычислили сумму цифр и т.д, пока не получилось однозначное число. Какое?

Задача 4. На доске написаны числа от 1 до 20. Каждую секунду какие-то два числа a и b заменяют на число
а) $a + b$;
б) ab;
в) $a + b - 1$;
г*) $ab + a + b$
В конце концов остаётся одно число. Какое?

Задача 5. Фигура «верблюд» ходит по доске 10×10 ходом типа $(1, 3)$ (то есть, она сдвигается сначала на соседнее поле, а затем сдвигается еще на три поля в перпендикулярном направлении; конь, например, ходит ходом типа $(1, 2)$). Можно ли пройти ходом «верблюда» с какого-то исходного поля на соседнее с ним?

Задача 6. В каждой клетке доски 3×3 сидело по жуку. Через некоторое время каждый жук переполз в соседнюю (по стороне) клетку. Докажите, что хотя бы в одной клетке сидит больше одного жука.

Задача 7. На шести ёлках сидят шесть чижей, на каждой ёлке — по чижу. Ёлки растут в ряд с интервалами в 10 метров. Если какой-то чиж перелетает с одной ёлки на другую, то какой-то другой чиж обязательно перелетает на столько же метров в обратном направлении.
а) Могут ли все чижи собраться на одной ёлке?
б) А если чижей и ёлок — семь?

Задача 8*. Болельщик Вася нарисовал расположение игроков на футбольном поле к началу первого и второго таймов. Оказалось, что некоторые игроки поменялись местами и при этом расстояние между любыми двумя игроками не увеличилось. Докажите, что все эти расстояния не изменились.

Задача 9*. По кругу расставлены числа 12, 7, 23, 45, 13, 5. За один ход можно прибавить или отнять одно и то же число (не обязательно целое) от двух стоящих рядом чисел. Можно ли за несколько ходов получить числа 7, 13, 4, 1, 5, 12?