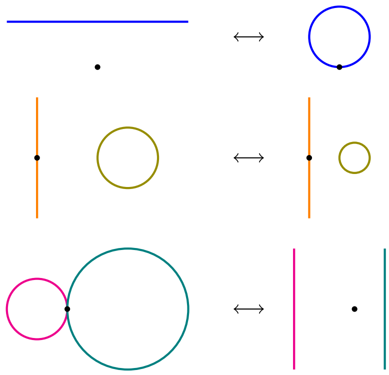
Инверсия и углы



- *Инверсия* относительно окружности S с центром O и радиусом R — преобразование, ставящее в соответствие точке A такую точку A' на луче OA, что $OA \cdot OA' = R^2$. Окружность S называют *окружностью инверсии*, O — *центром инверсии*, R — *радиусом инверсии.*
- Углом между пересекающимися окружностями называют угол между касательными к ним в точке пересечения. Угол между прямой и окружностью определяется аналогично.
- Обобщённая окружность — прямая или окружность.

Задача 0. Докажите, что инверсия сохраняет углы между обобщёнными окружностями.

Задача 1. а) Какая прямая перпендикулярна данной окружности? двум данным окружностям?
б) Окружности радиусов R и r перпендикулярны. Чему равно расстояние между их центрами?

Задача 2. Даны окружности S_1, S_2 и точка A. С помощью циркуля и линейки постройте окружность, проходящую через A и перпендикулярную S_1 и S_2.

Задача 3. Окружности S_1 и S_2 перпендикулярны прямой ℓ и окружности ω, пересекающей ℓ в точке A. Нарисуйте образ этой картинки после инверсии с центром в точке A.

Докажите следующие утверждения с помощью инверсии:

Задача 4 (Лемма Архимеда). Окружность ω касается окружности Ω в точке P и касается хорды AB окружности Ω в точке Q. Докажите, что PQ — биссектриса угла APB.

Задача 5 (Теорема Птолемея). Докажите, что во вписанном четырёхугольнике сумма произведений противолежащих сторон равна произведению диагоналей.