Инверсия

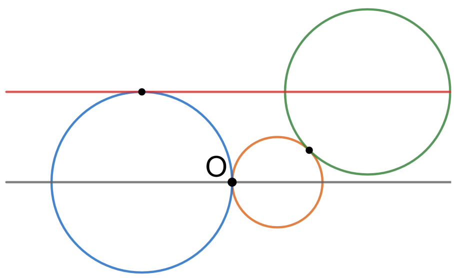
- ▷ *Инверсия* относительно окружности S с центром O и радиусом R — преобразование, ставящее в соответсвие точке A такую точку A' на луче OA, что $OA \cdot OA' = R^2$. Окружность S называют *окружностью инверсии*, O — *центром инверсии*, R — *радиусом инверсии*.
- ▷ Удобно рассматривать плоскость, дополненную *бесконечно удалённой точкой* — образом точки O.
- ▷ При инверсии прямая, проходящая через центр, переходит в себя; прямая, не проходящая через центр, переходит в окружность, проходящую через центр.

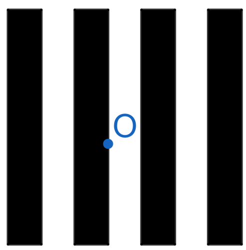
Задача 1. Докажите, что при инверсии
а) окружность, проходящая через центр инверсии, переходит в прямую, не проходящую через центр инверсии;
б) окружность, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, также не проходящую через центр инверсии.

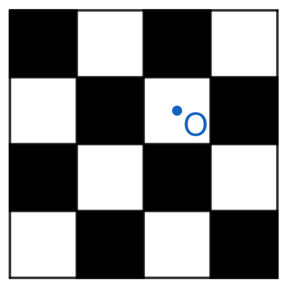
- ▷ Удобно рассматривать *обобщённые окружности* — окружности или прямые. Таким образом, при инверсии обобщённые окружности переходят в обобщённые окружности.

Задача 2. Докажите, что если две окружности (или окружность и прямая) касаются в точке M, отличной от точки O, то
а) их образы при инверсии относительно окружности с центром O также касаются;
б) при инверсии с центром M эти две окружности (или окружность и прямая) переходят в две параллельные прямые.

Задача 3. Изобразите схематично, что получится в результате применения к каждому из трёх следующих рисунков инверсии с центром O:



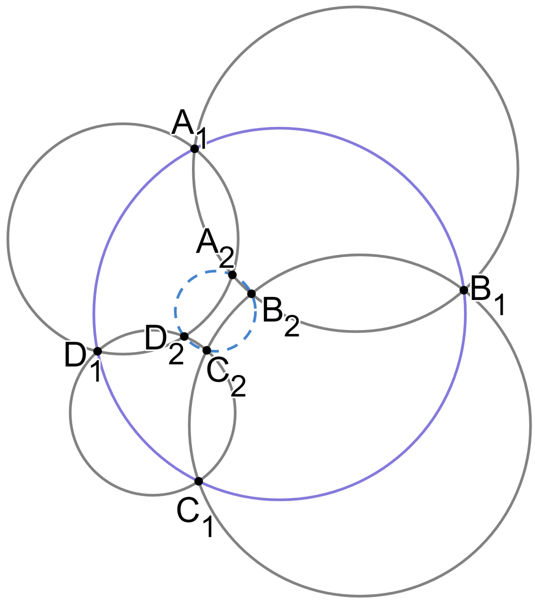


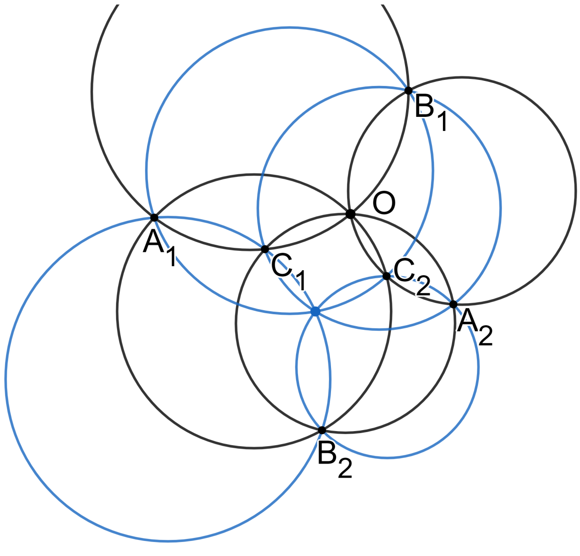


Инверсия (продолжение)

▷ В задачах, где дано много пересекающихся окружностей, бывает полезно применить инверсию, превращающую часть из этих окружностей в прямые, и воспользоваться уже известными фактами о тех или иных конструкциях из прямых и окружностей.

Задача 4. Даны четыре окружности S_1, S_2, S_3, S_4. Пусть S_1 и S_2 пересекаются в точках A_1 и A_2, S_2 и S_3 — в точках B_1 и B_2, S_3 и S_4 — в точках C_1 и C_2, S_4 и S_1 — в точках D_1 и D_2 (см. рисунок). Докажите, что если точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на одной окружности S (или прямой), то и точки A_2, B_2, C_2, D_2 лежат на одной окружности (или прямой).





Задача 5. На плоскости взяты шесть точек A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2. Докажите, что если окружности, описанные около треугольников $A_1B_1C_1$, $A_1B_2C_2$, $A_2B_1C_2$, $A_2B_2C_1$, проходят через одну точку, то и окружности, описанные около треугольников $A_2B_2C_2$, $A_2B_1C_1$, $A_1B_2C_1$, $A_1B_1C_2$, проходят через одну точку.