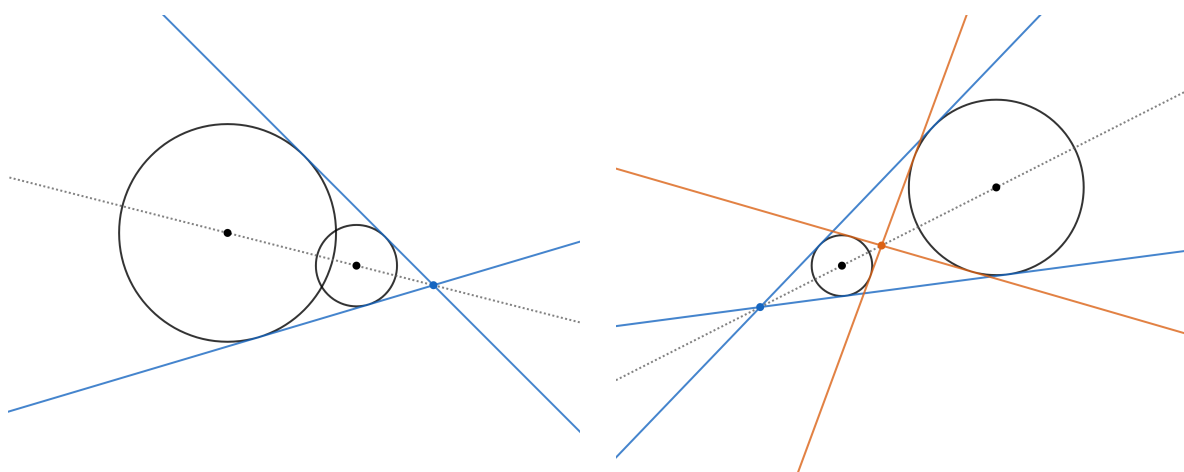


Гомотетия и окружности

- ▷ Гомотетия H_O^k с центром в точке O и коэффициентом k — преобразование плоскости, переводящее точку A в такую точку A' , что $\vec{OA'} = k \cdot \vec{OA}$.
- ▷ Гомотетия *изменяет* расстояния в $|k|$ раз, но сохраняет углы.
- ▷ Для любых двух окружностей разного радиуса существует гомотетия, переводящая одну из них в другую; центр гомотетии лежит на *линии центров* этих окружностей (у концентрических окружностей — совпадает с их центром).

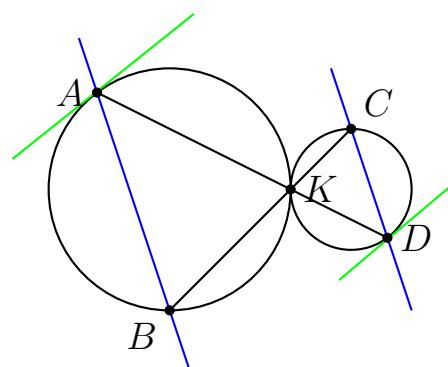


- ▷ Общие внешние касательные двух окружностей проходят через центр гомотетии, переводящей эти окружности друг в друга. Общие внутренние касательные двух окружностей также проходят через центр (другой) гомотетии, переводящей эти окружности друг в друга.

Задача 0. Две окружности касаются в точке K . Через точку K проведены две прямые, пересекающие первую окружность в точках A и B , вторую — в точках C и D .

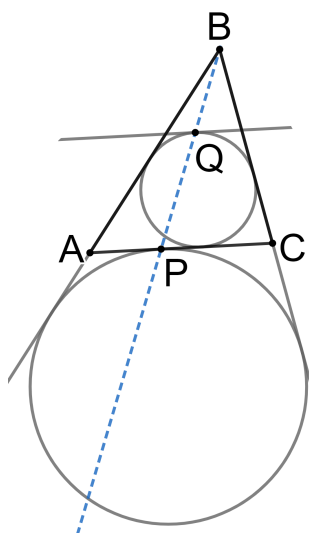
а) Докажите, что $AB \parallel CD$.

б) Докажите, что касательные к окружностям в точках A и D также параллельны.



Задача 1. В угол вписаны окружности радиусов 1, r и 4, причём вторая окружность касается первой и третьей. Найдите r .

Гомотетия и окружности (продолжение)



Задача 2. Внеписанная окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке P . Касательная в точке Q к вписанной окружности треугольника ABC параллельна AC . Докажите, что точки P, B, Q лежат на одной прямой, причём $BQ : BP = r : R$, где r — радиус вписанной окружности, R — внеписанной.

Задача 3. Точка D на стороне BC треугольника ABC такова, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABD и ACD равны. Докажите, что радиусы окружностей, внеписанных в треугольники ABD и ACD , касающихся соответственно отрезков BD и CD , также равны.

Задача 4. а) Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке D , DM — её диаметр. Прямая BM пересекает сторону AC в точке K . Докажите, что $AK = DC$.

б) Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC , B_1 — середина стороны AC . Докажите, что прямая B_1I делит отрезок BD пополам.

Задача 5 (Лемма Архимеда). Две окружности касаются внутренним образом в точке M . Пусть хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке T . Докажите, что MT — биссектриса AMB .

