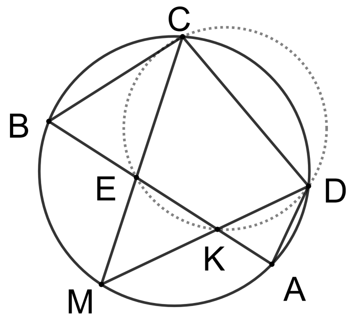
Углы и дуги

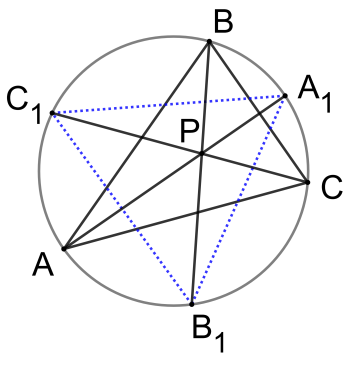
- Центральный угол равен дуге, на которую он опирается;
- Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается;
- Угол между пересекающимися хордами равен полусумме дуг окружности, заключенных между ними;
- Угол между секущими равен полуразности дуг окружности, заключенных внутри этого угла.

Задача 1. На окружности даны точки A, B, C и D в указанном порядке; K, L, M и N — середины дуг AB, BC, CD и DA соответственно. Докажите, что $KM \perp LN$.



Задача 2. На окружности даны точки A, B, C, D в указанном порядке. Точка M — середина дуги AB. Обозначим точки пересечения хорд MC и MD с хордой AB через E и K. Докажите, что $KECD$ — вписанный четырёхугольник.

Задача 3. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Продолжения его сторон AB и CD пересекаются в точке K, а продолжения сторон BC и AD — в точке N. Докажите, что биссектрисы углов BKC и ANB перпендикулярны.



Задача 4. Внутри остроугольного треугольника ABC взята такая точка P, что $\angle APB = \angle ACB + 60°$, $\angle BPC = \angle BAC + 60°$ и $\angle CPA = \angle CBA + 60°$. Прямые AP, BP и CP пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ — равносторонний.

Задача 5. Дан правильный семиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Прямые A_2A_3 и A_5A_6 пересекаются в точке X, а прямые A_3A_5 и A_1A_6 — в точке Y. Докажите, что прямые A_1A_2 и XY параллельны.