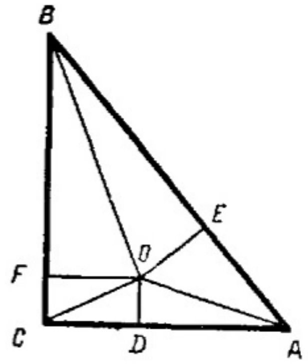
Всё наоборот

С первым апреля!

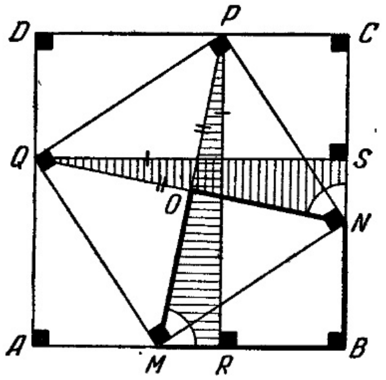
В предложенных ниже решениях задач содержатся ошибки — найдите и исправьте их!

Задача 1. Катет прямоугольного треугольника равен его гипотенузе.



Доказательство. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC BO — биссектриса острого угла, D — середина катета AC, $DO \perp AC$, $OE \perp AB$, $OF \perp BC$. Тогда прямоугольные треугольники BOE и BOF равны как имеющие общую гипотенузу BO и равные катеты OE и OF, а значит, $BE = BF$. Аналогично, прямоугольные треугольники OEA и OCF равны, т.к. $OA = OC$ и $OE = OF$, откуда получаем $AE = FC$. Таким образом, $AB = AE + BE = FC + BF = BC$.

Задача 2. Любой прямоугольник $MNPQ$, вписанный в квадрат $ABCD$ *(см. рис.)*, также является квадратом.

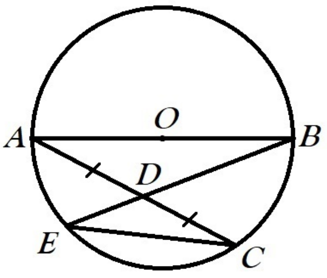


Доказательство. Опустим перпендикуляры PR и QS из точек P и Q соответственно на AB и BC. Каждый из этих перпендикуляров равен стороне квадрата $ABCD$, а значит, они равны между собой. Таким образом, в прямоугольных треугольниках PRM и QSN равны катеты и равны гипотенузы (как диагонали прямоугольника $MNPQ$), следовательно, эти треугольники равны, и $\angle PMR = \angle QNS$. Рассмотрим четырёхугольник $MBNO$, где O — точка пересечения диагоналей прямоугольника $MNPQ$; у него внешний угол при вершине N равен внутреннему углу при вершине M, значит, этот четырёхугольник — вписанный, и сумма внутренних углов при вершинах B и O равна $180°$; при этом $\angle B = 90°$, значит, угол O — также прямой. Таким образом, диагонали прямоугольника $MNPQ$ перпендикулярны и, следовательно, этот прямоугольник является квадратом.

Всё наоборот (продолжение)

Задача 3. Во всякой окружности можно указать хорду, не проходящую через её центр, но равную тем не менее её диаметру.

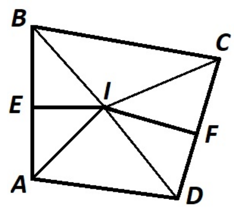
Доказательство.



В произвольной окружности проведём диаметр AB и хорду AC. Через середину D этой хорды и точку B проводим хорду BE. Соединив точки C и E, получаем треугольники ABD и CDE. Тогда $\angle BAC = \angle CEB$ как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу, а $\angle ADB = \angle CDE$ как вертикальные; стороны AD и CD равны по построению. Отсюда заключаем, что $\triangle ABD$ и $\triangle ECD$ равны (по стороне и двум углам). Но стороны равных треугольников, лежащие против равных углов, равны, т.е. диаметр AB оказывается равным некоторой не проходящей через центр окружности хорде CE.

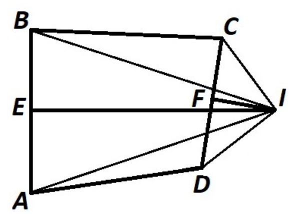
Задача 4. Тупой угол равен прямому.

Доказательство. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, в котором угол C прямой, угол D тупой, $BC = AD$. Восстановим в серединах E и F сторон AB и CD перпендикуляры к этим прямым. Пусть I — точка пересечения этих перпендикуляров. Существует два случая: точка I лежит внутри или вне четырёхугольника $ABCD$.



1) Предположим сначала, что точка I лежит внутри четырёхугольника $ABCD$. Соединим эту точку с четырьмя вершинами. Треугольники AID и BIC равны по трём сторонам, поэтому $\angle ADI = \angle BCI$.

Если к каждому из этих двух углов прибавить один и тот же угол $\angle FDI = \angle FCI$, то получим: тупой угол $D =$ прямому углу C.

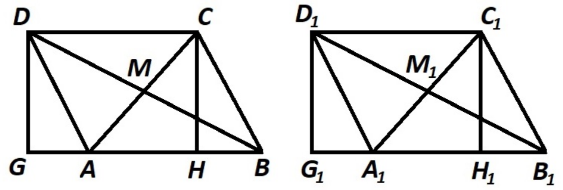


2) Предположим теперь, что точка I лежит вне четырёхугольника $ABCD$. Соединим опять точку I с четырьмя вершинами. Легко убедиться, как и раньше, в том, что $\angle ADI = \angle BCI$.

Если от каждого из этих углов отнять один и тот же угол $\angle FDI = \angle FCI$, то получим $\angle D = \angle C$.

Всё наоборот (продолжение)

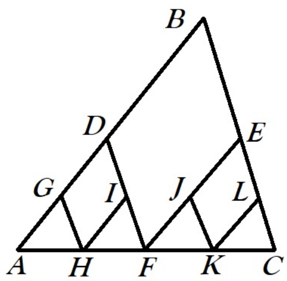
Задача 5. Докажите, что если у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны стороны AB и A_1B_1, равны высоты CH и C_1H_1 и равны медианы BM и B_1M_1, то такие треугольники равны.



Доказательство.
Продолжим медианы BM и B_1M_1 за точки M и M_1 соответственно и отложим отрезки $MD = BM$ и $M_1D_1 = B_1M_1$ *(см. рис.)*. Получим параллелограммы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Из вершин D и D_1 опустим перпендикуляры DG и D_1G_1 на прямые AB и A_1B_1 соответственно. Тогда $DG = CH = C_1H_1 = D_1G_1$, значит, равны прямоугольные треугольники BDG и $B_1D_1G_1$ (по гипотенузе и катету). Следовательно, $\angle DBG = \angle D_1B_1G_1$.

Треугольники ABM и $A_1B_1M_1$ равны по двум сторонам и углу между ними ($AB = A_1B_1$, $BM = B_1M_1$, $\angle ABM = \angle A_1B_1M_1$). Тогда $AM = A_1M_1$ и $\angle BAM = \angle B_1A_1M_1$. Из равенства отрезков AM и A_1M_1 следует, что $AC = A_1C_1$. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Задача 6. В любом треугольнике сумма двух сторон равна третьей.



Доказательство.
Пусть в произвольном треугольнике ABC точки D, E, F — середины сторон AB, BC, AC. Проведём DF и EF. Известно, что $DF = \frac{1}{2}BC = BE$ и $EF = \frac{1}{2}AB = BD$. Таким образом, длина ломаной $ADFEC$ равна $AB + BC$.

Если повторить тот же приём в обоих только что построеных треугольниках, получим, что длина ломаной $AGHIFJKLC$ равна длине ломаной $ADFEC$, то есть, $AB + BC$.

Если повторить этот приём бесконечное количество раз, то заметим, что вершины этой ломаной будут приближаться к линии AC, а значит, в конце концов ломаная совпадёт с линией AC. Следовательно, $AC = AB + BC$.