НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 4.
Гладкие многообразия. 28.02.2005

Задача 1. Доказать, что $\mathbb{S}^n$ является гладким многообразием.

Задача 2. Доказать, что $\mathbb{R}P^n$ является гладким многообразием.

Задача 3. Доказать, что $\mathbb{C}P^n$ является комплексно-аналитическим многообразием.

Задача 4. Доказать, что пространство k-плоскостей в $\mathbb{R}^n$ обозначаемое $G(k,n)$ или $G(k,\mathbb{R}^n)$ является гладким многообразием (это многообразие называется многообразием Грассмана). Доказать, что $G(k,\mathbb{C}^n)$ является комплексно-аналитическим многообразием. Доказать, что $G(k,n) \cong G(n-k,n)$, $G(1,n) \cong \mathbb{R}P^{n-1}$.

Задача 5. Доказать, что пространство ортонормированных k-реперов в $\mathbb{R}^n$ обозначаемое $V(n,k)$ или $V(k,\mathbb{R}^n)$ является гладким многообразием (это многообразие называется многообразием Штифеля). Доказать, что $V(k,n) \cong V(n-k,n)$, $V(1,n) \cong \mathbb{S}^{n-1}$, $V(n,n) \cong SO(n)$.

Задача 6. Фиксируем последовательность натуральных чисел $k_1 < \ldots < k_s < n$. Доказать, что пространство флагов $F_{k_1,\ldots,k_s} = \{V_{k_1} \subset \ldots V_{k_s} \subset \mathbb{R}^n\}$ является гладким многообразием. Аналогичный вопрос для комплексных флагов. Обратить внимание на то, что $F_k = G(k,n)$.

Задача 7. Построить естественное отображение $V(k,n) \longrightarrow G(k,n)$ и доказать, что это гладкое отображение.

Задача 8. Построить естественное отображение $O(n) \longrightarrow V(k,n)$ и доказать, что это гладкое отображение.

Задача 9. Построить естественное отображение $F_{k_1,\ldots,k_s} \longrightarrow F_{k_1,\ldots,\hat{k}_i,\ldots,k_s}$ и доказать, что это гладкое отображение.

Задача 10. Проверить, что $O(n)$ и $SO(n)$ — группы Ли, и доказать, что их алгеброй Ли является алгебра кососимметрических $n \times n$ матриц $\mathfrak{so}(n)$.

Задача 11. Доказать, что $U(n)$ — группа Ли и найти ее алгебру Ли.

Задача 12. Доказать, что многообразие Грассмана $G(k,n)$ является однородным пространством группы $O(n)$, и поэтому $G(k,n) = O(n)/[O(k) \times O(n-k)]$.

Задача 13. Доказать, что многообразие Штифеля $V(k,n)$ является однородным пространством группы $O(n)$, и поэтому $V(k,n) = O(n)/O(n-k)$.

Задача 14. Докажите, что сфера $\mathbb{S}^1$ диффеоморфна $\mathbb{R}P^1$ и $SO(2)$.

Задача 15. Докажите, что сфера $\mathbb{S}^2$ диффеоморфна $\mathbb{C}P^1$.

Задача 16. Докажите, что сфера $\mathbb{S}^3$ диффеоморфна $SU(2)$.

Задача 17*. Сколько не обращающихся в ноль линейно независимых в каждой точке векторных полей существует на $\mathbb{S}^n$ при $n = 1, 2, 3$?