## 6 сентября 1999 года
(осенний экзамен 1999 года)

1. Могут ли абсциссы вершин правильного шестиугольника на координатной плоскости образовывать (в каком-нибудь порядке) арифметическую прогрессию?

2. Известно, что $\sin x = 3/5$. Докажите, что $\sin 125x$ равен дроби со знаменателем $5^{125}$, числитель которой не делится на 5.

3. Точки $A$ и $B$ лежат на параболе, заданной уравнением $y = x^2$. На дуге $AB$ параболы выбрана такая точка $M$, что площадь треугольника $AMB$ является наибольшей. Докажите, что касательная к параболе в точке $M$ параллельна отрезку $AB$.

4. Существует ли в пространстве окружность с центром в точке $(2, 3, 4)$, касающаяся всех трех координатных плоскостей? (По определению, окружность в пространстве касается плоскости, если она имеет с плоскостью ровно одну общую точку.)

5. Докажите, что для любого набора неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выполнено неравенство

$$(x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_n^4)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \geqslant (x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

6. Имеется 100-этажный небоскреб и два одинаковых стеклянных шарика. За какое наименьшее число попыток можно с гарантией определить самый низкий этаж, при бросании с которого шарики этого типа разбиваются?

Одна попытка — это одно бросание одного шарика с какого-то этажа. Если шарик после бросания не разбился, то он сохраняет все свои свойства и его можно использовать в дальнейшем; разбившийся шарик из игры выбывает. Если шарик разбивается при бросании с этажа номер $n$, то он разобьется и при бросании с этажа номер $n + 1$. Шарики могут оказаться и небьющимися.