Одна задача о нахождении фальшивой монеты

Д. А. Михалин И. М. Никонов

Заметка посвящена решению задачи 10.10 из задачника «Математического просвещения» и родственным вопросам.

Наверное, каждый, кто участвовал в работе математических кружков, имел дело со следующей задачей:

Задумано натуральное число, меньшее 1024*. На каждый вопрос отвечают «да» или «нет». За какое минимальное число вопросов можно угадать задуманное число*?

Это типичный пример задачи на темы теории информации, когда речь идет о том, чтобы извлечь максимум информации из некоторого сообщения (в данном случае — совокупности ответов на вопросы). Существует целый класс задач такого рода, которые не требуют специальных знаний, но хорошо демонстрируют идеи теории информации: это задачи о нахождении фальшивой монеты.

Пусть дано несколько монет, и среди них одна монета фальшивая, а остальные настоящие, причем все настоящие — одинакового веса, а фальшивая — другого веса. Требуется найти алгоритм, гарантирующий определение фальшивой монеты за минимальное количество взвешиваний на чашечных весах без гирь. В некоторых задачах известен *относительный вес* фальшивой монеты (т. е. легче она или тяжелее настоящих), в некоторых нет; в последнем случае иногда требуется определить ее относительный вес, иногда нет.

Если разница в весе между фальшивой и настоящей монетами меньше минимального веса монеты, то результат взвешивания, при котором на чашках лежит разное число монет, определен однозначно, и можно проводить лишь такие взвешивания, когда число монет на чашках одинаково. Об этой ситуации и пойдет речь.

Различные типы задач на взвешивание рассмотрены в книге А. М. и И. М. Ягломов «Вероятность и информация» [1, с. 146–163]. Наибольшее внимание уделено следующему случаю: среди нескольких монет за наименьшее число взвешиваний найти фальшивую монету и определить ее

Ред. А. Я. Канель-Белов, Б. Р. Френкин

относительный вес [1, с. 157–162]. Показано, что за n взвешиваний это можно сделать в том и только том случае, когда количество монет не больше $(3^n-3)/2$. Отсюда вытекает решение хорошо известной в фольклоре задачи [2, с. 10–11, задача 6а]:

Среди 12 *монет имеется* 1 *фальшивая, причем неизвестно, легче она или тяжелее. За три взвешивания нужно определить фальшивую монету и ее относительный вес.*

В известном сборнике Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова и И. М. Яглома [2, с. 11] в качестве нерешенной была поставлена такая задача (номер 6б): среди нескольких монет найти единственную фальшивую за наименьшее число взвешиваний, если неизвестен относительный вес фальшивой монеты и не требуется его определить. Авторам настоящей статьи удалось решить эту задачу. Мы покажем следующее:

Максимальное число монет, из которых можно найти фальшивую за n взвешиваний, не определяя ее относительный вес, равно $(3^n-1)/2$.

Этот результат докладывался в 1994 г. на научной конференции школьников «Поиск» (председатель оргкомитета А. Я. Канель-Белов, научный руководитель работы С. И. Комаров). Мы благодарны Т. Комразу и А. Я. Канель-Белову за полезное обсуждение. Часть материала этой статьи опубликована в заметке [3]. Для полноты изложения ряд задач (1, 2, $1'$, 4) повторяет задачи из книги А. М. и И. М. Ягломов [1]. Авторы благодарят редакторов статьи А. Я. Канеля-Белова и Б. Р. Френкина за предоставленный дополнительный материал.

1. Простейшие случаи

Начнем с более простого вопроса. Широко известна следующая задача:

Задача 1. *Дано 3^n монет, из них одна фальшивая. За какое минимальное число взвешиваний можно найти фальшивую монету, если известно, что она тяжелее настоящих?*

Решение. Покажем, что *если всего монет 3^n, то при известном относительном весе можно найти фальшивую монету за n взвешиваний. Если количество монет больше 3^n, то n взвешиваний недостаточно. Этот результат не зависит от наличия дополнительных, заведомо настоящих монет.*

Проведем индукцию по n. Случай $n=0$ тривиален. Пусть $n>0$ и для $n-1$ утверждение верно. Разобьем монеты на три группы по 3^{n-1} монет в каждой и взвесим первые две. Если веса равны, то фальшивая монета — в оставшейся куче. В противном случае, если фальшивая легче, то она в более легкой группе, а если тяжелее — в более тяжелой. В любом случае после первого взвешивания группа монет, среди которых идет поиск, уменьшилась в три раза. Значит, за n взвешиваний фальшивую монету найти можно.

Покажем, что нельзя обойтись меньшим числом взвешиваний. Пусть у нас есть k подозрительных монет (из которых надо определить фальшивую) и, может быть, сколько-то монет, про которые мы знаем, что они настоящие. Достаточно показать, что после любого взвешивания количество подозрительных монет может уменьшиться не более чем втрое.

Всего имеется k вариантов (k возможных номеров фальшивой монеты.) Каждое взвешивание имеет три возможных исхода (перевесила левая чашка, перевесила правая, уравновесились). Разным исходам отвечают разные варианты. Таким образом, варианты делятся на три группы. Одна из групп содержит не меньше трети от исходного числа вариантов, откуда и следует доказываемое утверждение.

Значительно сложнее среди нескольких монет найти фальшивую, если неизвестен ее относительный вес.

Задача 2. *Докажите следующие утверждения.*

а) *Если число монет не меньше* $(3^n+1)/2$, *то за* n *взвешиваний нельзя найти фальшивую монету, узнав при этом ее относительный вес, даже если имеется некоторое количество дополнительных настоящих монет.*

б) *Если число монет не меньше* $(3^n-1)/2$ *и нет дополнительных настоящих монет, то за* n *взвешиваний нельзя найти фальшивую монету, узнав при этом ее относительный вес.*

Решение. а) Случай $n=0$ тривиален. Пусть $n>0$ и для $n-1$ утверждение верно. После первого взвешивания возможны две ситуации.

1) Осталось не менее $(3^{n-1}+1)/2$ неиспользованных монет. Тогда в случае равновесия все они подозрительны, и по предположению индукции оставшихся $n-1$ взвешиваний не хватит.

2) Взвешены более чем 3^{n-1} монет. В случае неравновесия любая из них может оказаться фальшивой. Тогда, как показано в задаче 1, за оставшиеся $n-1$ взвешиваний фальшивую невозможно определить (даже при известном относительном весе), и это рассуждение не зависит от наличия дополнительных настоящих монет. Утверждение а) доказано.

б) Случай $n=0$ тривиален. Пусть $n>0$ и для $n-1$ утверждение верно. После первого взвешивания возможны следующие ситуации.

1) Осталось не менее $(3^{n-1}+1)/2$ неиспользованных монет. Тогда в случае равновесия все они подозрительны, и согласно результату п. а) оставшихся $n-1$ взвешиваний не хватит.

2) Взвешено не менее 3^{n-1} монет. Но на чашках равное количество монет, поэтому количество взвешенных четно и, значит, больше 3^{n-1}.

В случае неравновесия все они подозрительны, и, в силу результата задачи 1, оставшихся $n-1$ взвешиваний не хватит. Утверждение б) доказано.

Тем не менее, *если $n > 1$ и количество монет равно $(3^n-1)/2$, то за n взвешиваний можно определить фальшивую (не определяя ее относительный вес). Если же количество монет меньше $(3^n-1)/2$, то можно определить и относительный вес.* Это будет показано в разделе 2.

Соображения, связанные с подсчетом числа исходов взвешивания, позволяют прийти к оптимальным алгоритмам нахождения фальшивой монеты. Надо так подбирать взвешивания на каждом шаге, чтобы количество вариантов, отвечающих трем возможным исходам, делилось максимально равномерно. Так можно придумать алгоритм, приведенный в разделе 2, и доказать оценку из раздела 3.

Упражнение 1. а) Покажите, что в задаче о 12 монетах (см. начало статьи) при первом взвешивании необходимо положить на чашки по 4 монеты, а 4 оставить невзвешенными.

б) Покажите *единственность* (с точностью до перенумерации монет) алгоритма из задачи 1.

2. Подготовительные задачи

Нам потребуется несколько усложненный вариант задачи 1:

Задача 1$'$. *Дано 3^n монет, из них одна фальшивая. За какое минимальное число взвешиваний можно найти фальшивую монету, если про каждую монету известно, каков окажется ее относительный вес в случае, если она фальшивая?*

Решение. Ответ снова n. Случай $n = 0$ тривиален. Проведем индуктивный переход от $n-1$ к n. Все 3^n монет распадаются на две группы: «легкую» и «тяжелую». В одной из этих групп четное количество монет, в другой нечетное. Отложим в сторону 3^{n-1} монет, причем в первую очередь будем откладывать из «нечетной» группы. После этого у нас в каждой группе останется четное число монет (возможно, в «нечетной» останется 0). Теперь каждую группу разделим пополам между двумя чашками весов. Если чашки уравновесились, то фальшивая монета среди 3^{n-1} отложенных, и по предположению индукции мы найдем ее за оставшиеся $n-1$ взвешиваний. Если чашки не уравновесились, то фальшивая монета — либо среди «легких» монет с легкой чашки, либо среди «тяжелых» с тяжелой. Подозрительные монеты составляют половину от взвешенных, т. е. всего их 3^{n-1}, и по предположению индукции нам потребуется еще не более $n-1$ взвешиваний. Недостаточность меньшего числа взвешиваний (даже при наличии дополнительных настоящих монет) доказывается так же, как в задаче 1.

Задача 3. *Пусть $n > 0$. Докажите следующие утверждения.*

а) *Пусть количество монет равно $(3^n-1)/2$ и среди них одна фальшивая. Тогда, положив при первом взвешивании на чашки весов по $(3^{n-1}-1)/2$ монет, можно найти фальшивую за n взвешиваний — не определив ее относительный вес.*

б) *Если имеется $(3^n+1)/2$ монет и одна заведомо настоящая, то также достаточно n взвешиваний.*

Решение. Пусть $n = 1$. Тогда в п. а) у нас только одна монета (фальшивая). В п. б) у нас 2 подозрительных монеты, 1 настоящая и 1 взвешивание. Сравнив одну из подозрительных монет с настоящей, найдем фальшивую монету. (Мы не узнаем ее относительный вес, если фальшивая монета окажется невзвешенной.)

Пусть теперь $n > 1$ и доказываемые утверждения верны для $n-1$. Докажем аналогичные утверждения для n.

Пункт а). Первое взвешивание. Заметим, что справедливо равенство $(3^n-1)/2 = (3^{n-1}-1)/2 + (3^{n-1}-1)/2 + (3^{n-1}+1)/2$. Положим на каждую чашку весов $(3^{n-1}-1)/2$ монет.

Случай 1.1. Чашки уравновесились. Тогда фальшивая монета среди тех $(3^{n-1}+1)/2$ монет, которые мы не взвешивали. Так как имеются заведомо настоящие монеты (все остальные), по предположению индукции можно найти фальшивую монету за оставшиеся $n-1$ взвешиваний.

Случай 1.2. При первом взвешивании одна из чашек (для определенности, левая) перевесила. Тогда $(3^{n-1}+1)/2$ монет, которые мы не взвешивали, настоящие. Назовем монеты на левой чашке «тяжелыми» (т. е. если среди них есть фальшивая, то она тяжелее), а монеты на правой чашке — «легкими». Произведем такое взвешивание: на левую чашку положим 3^{n-2} настоящих и $(3^{n-2}-1)/2$ «тяжелых» монет, а на правую чашку 3^{n-2} «тяжелых» и $(3^{n-2}-1)/2$ «легких». Кроме этого, останется 3^{n-2} «легких» монет и некоторое количество заведомо настоящих.

Второе взвешивание. *Случай* 2.1. Чашки уравновесились. Тогда фальшивая монета среди тех 3^{n-2} «легких» монет, которые мы не взвешивали, и, следовательно, она легче остальных. Согласно результату задачи 1, нам теперь хватит $n-2$ взвешиваний, и задача решена.

Случай 2.2. Левая чашка перевесила. Тогда фальшивая монета — или среди $(3^{n-2}-1)/2$ «тяжелых» на левой чашке, или среди $(3^{n-2}-1)/2$ «легких» на правой. Но такая ситуация возможна после первого взвешивания $(3^{n-1}-1)/2$ монет (так как мы тогда кладем на чашки по $(3^{n-2}-1)/2$ монет), и в этом случае по предположению индукции можно найти фальшивую монету за $n-2$ взвешиваний. Задача решена.

Случай 2.3. Правая чашка перевесила. Тогда фальшивая монета среди тех 3^{n-2} «тяжелых» монет, которые лежат на правой чашке. Согласно результату задачи 1, нам теперь хватит $n-2$ взвешиваний. Утверждение а) доказано.

Пункт б). Первое взвешивание. Положим на левую чашку весов $(3^{n-1}+1)/2$ подозрительных монет, а на правую $(3^{n-1}-1)/2$ подозрительных и 1 настоящую.

Случай 1.1. Чашки уравновесились. Тогда фальшивая монета — среди оставшихся $(3^{n-1}+1)/2$, и по предположению индукции мы найдем ее за $n-1$ взвешиваний (располагая настоящей монетой).

Случай 1.2. Чашки не уравновесились. Снимем с весов настоящую монету. На одной из чашек находится четное количество подозрительных монет, а на другой нечетное. Снимем с «нечетной» чашки 3^{n-2} монет, а остальные монеты с этой чашки распределим поровну между двумя чашками. Монеты с «четной» чашки также распределим поровну между двумя чашками.

Второе взвешивание. *Случай* 2.1. Чашки уравновесились. Тогда фальшивая монета — среди оставшихся 3^{n-2} монет, взятых с «нечетной» чашки. Мы знаем, какая чашка перевесила при предыдущем взвешивании — «нечетная» или «четная». Поэтому нам известен относительный вес фальшивой монеты, и согласно результату задачи 1 мы найдем ее теперь за $n-2$ взвешиваний.

Случай 2.2. Чашки не уравновесились. Тогда фальшивая монета — среди тех монет, которые либо при обоих взвешиваниях были на «тяжелой» чашке, либо в обоих случаях были на «легкой». Таких монет 3^{n-2}. Про каждую мы знаем, каким окажется ее относительный вес, если она фальшивая. Согласно результату задачи $1'$, нам теперь хватит $n-2$ взвешиваний. Утверждение б) доказано.

Упражнение 2. Покажите, что при достаточном запасе настоящих монет (каком именно?) можно определить фальшивую среди $(3^n-1)/2$ монет и найти ее относительный вес за n взвешиваний.

Задача 4. *Докажите, что среди $(3^n-3)/2$ монет за n взвешиваний можно найти фальшивую монету и определить ее относительный вес.*

Решение. Заметим, что в алгоритме из задачи 3а обязательно остается хотя бы одна монета, которая ни разу не взвешивалась. Если в какой-то момент нужно положить на весы какие-то из еще не взвешенных монет, то мы можем выбрать любые из них, так как все невзвешенные монеты для нас одинаковы. Теперь возьмем $(3^n-3)/2$ монет и мысленно добавим к ним еще одну настоящую монету. Будем действовать по алгоритму из задачи 3, каждый раз включая воображаемую монету в число невзвешенных. При указанном алгоритме фальшивая монета либо останется единственной невзвешенной (но в данном случае это невозможно), либо попадет на весы, и тогда мы определим ее относительный вес.

Упражнение 3. Модифицируйте алгоритм задачи 4 для числа монет, меньшего чем $(3^n - 3)/2$.

3. Доказательство основного результата

В этом разделе будет решена

Задача 5. *Докажите, что за n взвешиваний нельзя из более чем $(3^n-1)/2$ монет найти фальшивую (даже если не требуется определить ее относительный вес).*

Решение. Определим более четко, что же такое *алгоритм построения системы взвешиваний*. Занумеруем все n монет. Алгоритм взвешивания заключается в последовательности следующих действий.

- ▷ На первом шаге монеты с номерами $i_1, \ldots, i_{k_1}$ кладутся на левую чашку весов, монеты с номерами $j_1, \ldots, j_{k_2}$ — на правую и взвешиваются.
- ▷ На каждом шаге, в зависимости от результатов предыдущих взвешиваний, выбираются номера монет для левой и для правой чашки. Затем производится взвешивание.

Положим a_i равным 0, если при i-ом взвешивании чашки весов уравновесились; 1, если перевесила правая чашка; -1, если перевесила левая. Назовем *протоколом* алгоритма последовательность $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ состояний весов при этих k взвешиваниях во время работы алгоритма. Назовем *состоянием* монетной системы число j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ — номер фальшивой монеты. Целью работы алгоритма является определение состояния.

Так как любой алгоритм в конце выдает номер фальшивой монеты, основываясь только на состояниях весов во время взвешиваний, то его можно представить как отображение множества протоколов в множество состояний монетной системы. Поэтому количество состояний монетной системы n меньше или равно количеству протоколов, т. е. $n \leqslant 3^k$.

Как показано выше (задача 4), максимальное число монет, среди которых можно найти фальшивую и определить ее относительный вес за k взвешиваний, равно $(3^k - 3)/2$. На первый взгляд кажется, что в случае, когда не надо находить относительный вес фальшивой монеты, максимальное число монет должно возрасти в два раза, то есть должно равняться $3^k - 3$. Для трех взвешиваний тогда получаем, что максимальное число равно 24, но непосредственной проверкой можно убедиться, что уже среди 14 монет нельзя найти фальшивую за 3 взвешивания. Почему же максимальное число монет оказалось настолько меньше ожидаемого? Дело в том, что *почти во всех случаях работы алгоритма мы узнаем не только номер монеты, но и ее относительный вес.*

Назовем *подсостоянием* монетной системы пару чисел (j, i), где j — состояние монетной системы, а i — относительный вес фальшивой монеты ($i = -1$, если фальшивая монета легче настоящих, и $i = 1$, если тяжелее).

Назовем протокол $(0, 0, \dots, 0)$ *нулевым*. Так как каждому протоколу может соответствовать только одно состояние монетной системы, то существуют $n-1$ состояний (и $2(n-1)$ подсостояний), которым соответствуют ненулевые протоколы. Назовем такие состояния *ненулевыми*.

Основное наблюдение состоит в следующем:

Лемма о принудительной информации. *Каждому ненулевому протоколу отвечает только одно подсостояние монетной системы.*

Доказательство леммы. Пусть взвешивания произведены и состояние монетной системы определено. Пусть протокол ненулевой, т. е. в какой-то момент одна чашка перевесила другую. Ясно, что тогда на весах лежала фальшивая монета. В этом случае мы определим не только *состояние* монетной системы, но и ее *подсостояние*, т. е. не только *номер* фальшивой монеты, но и ее *относительный вес*.

В самом деле, мы знаем, что фальшивая монета участвовала во взвешивании, знаем ее номер и на какую чашку она легла. Но по протоколу взвешивания и информации, на какой из двух чашек лежит фальшивая монета, мы определим и ее относительный вес. Лемма доказана.

Теперь выберем произвольный алгоритм, который за k взвешиваний среди n монет определяет фальшивую монету. Согласно лемме, количество ненулевых подсостояний не больше, чем количество ненулевых протоколов, то есть $2(n-1) \leqslant 3^k - 1$. Следовательно, $n \leqslant (3^k + 1)/2$.

Докажем, что *верхнюю оценку можно понизить еще на единицу.* Пусть $n = (3^k + 1)/2$; m_1 — число монет, которые кладутся на весы при первом взвешивании; m_2 — число остальных монет. Предположим, что $m_2 > (3^{k-1} + 1)/2$. Тогда, если весы уравновесятся при первом взвешивании, то фальшивая монета окажется среди этих m_2 монет, и мы не сможем найти ее за $k-1$ взвешивание, согласно доказанному в предыдущем абзаце. Следовательно, $m_2 \leqslant (3^{k-1} + 1)/2$. Тогда $m_1 \geqslant 3^{k-1}$. Так как m_1 четно, то $m_1 > 3^{k-1}$.

Рассмотрим случай, когда весы при первом взвешивании не уравновесились. Тогда фальшивая монета находится среди группы из m_1 монет. Существует $2 \cdot 3^{k-1}$ протоколов, удовлетворяющих этому условию. Так как весы хотя бы один раз не пришли в равновесие, то, определив номер фальшивой монеты, мы узнаем относительный вес монеты, то есть алгоритм различает подсостояния наших m_1 монет. Тогда количество подсостояний m_1 монет не больше, чем количество протоколов, у которых на первом месте стоит ± 1, т. е. $2m_1 \leqslant 2 \cdot 3^{k-1}$. Значит, $m_1 \leqslant 3^{k-1}$. Но $m_1 > 3^{k-1}$. Противоречие.

Следовательно, если алгоритм за k взвешиваний среди n монет находит фальшивую, то $n \leqslant (3^k - 1)/2$.

Упражнение 4. Покажите *единственность* (с точностью до перенумерации монет) приведённых выше алгоритмов.

Задача на исследование. *Исследуйте случай нескольких фальшивых монет.*

Комментарий А. Я. Канель-Белова. Меня познакомил с авторами этой статьи (тогда школьниками) замечательный учитель — Сергей Григорьевич Ро́ман. К сожалению, его уже нет в живых.

Школьники решили открытый вопрос, стоявший около 20 лет. Краткость решения означает наличие стратегической, «философской» идеи. И такая идея — дополнительной информации, которую мы вынуждены получить, — в работе присутствует (см. раздел 3). Замечательно, что авторы, в то время школьники, нашли новый подход к задачам теории информации.

Для этого потребовалось понять, что такое *алгоритм определения фальшивой монеты*, и формализовать это понятие. Вообще, с процедурой *формализации* связано интересное явление. Она нужна прежде всего для доказательства невозможности. Чтобы показать наличие построения циркулем и линейкой, достаточно его привести. Формализация не нужна — достаточно общего понимания процедуры построения на уровне здравого смысла. Однако когда требуется доказать *невозможность* построения, необходимо саму процедуру превратить в математический объект, т. е. *формализовать*. Классические примеры: неразрешимость уравнений пятой степени в радикалах и доказательство теоремы Гёделя (о наличии верных, но недоказуемых утверждений в арифметике). В последнем случае потребовалась формализация понятия математического *доказательства*.

Список литературы

[1] Яглом А. М., Яглом И. М. *Вероятность и информация.* М.: Наука, 1973 (3-е изд.).

[2] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. *Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть* 1. М.: Физматлит, 2001 (6-е изд.).

[3] Михалин Д., Никонов И. *Задача о нахождении фальшивой монеты* // Фунд. и прикл. матем. Т. 1, №2, 1995. С. 561–563.

Д. А. Михалин
И. М. Никонов