Конкурсы и олимпиады

Студенческие олимпиады по геометрии и топологии

А. А. Ошемков А. Б. Скопенков

Великий русский ученый А. Н. Колмогоров говорил, что до тридцати лет математику разумнее всего заниматься решением конкретно поставленных задач. А значит, умение решать сложные задачи является одним из важнейших для молодого математика. С целью поддержать престиж умения решать трудные задачи на механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова проводятся студенческие олимпиады. Отдельные кафедры мехмата МГУ проводят олимпиады по теории вероятностей, дифференциальным уравнениям, механике, геометрии и топологии (для студентов 1–2 курса; эти олимпиады помогают студенту в выборе кафедры), а также по теории вероятностей (для студентов 3–5 курсов) и уравнениям с частными производными (для студентов 3 курса). Проводятся также общематематические олимпиады — олимпиада, посвященная Пифагору, и отборочная на международную олимпиаду.

Задачи олимпиад по геометрии и топологии принадлежат математическому фольклору, но малоизвестны. Большинство этих задач либо являются частными случаями недавних результатов или нерешенных проблем, либо открывают новый для студентов взгляд на знакомый им материал (см. комментарии к решениям). Варианты олимпиад — плод коллективного труда сотрудников кафедры дифференциальной геометрии и приложений мехмата МГУ (окончательные варианты подготовлены А. Б. Скопенковым в 2005 г. и А. А. Ошемковым в 2006 г.).

Победители олимпиад по геометрии и топологии награждаются математическими призами, зачетом по курсу классической дифференциальной геометрии и приглашением на отборочный тур на международную олимпиаду (см. `www.imc-math.org`). Победители олимпиады 2005 года (решили 4 задачи): второкурсники Авдеев Роман, Горин Вадим, Ероховец Николай, Изосимов Антон, Куюмжиян Каринэ, Поршнев Евгений и 10-классник Девятов Ростислав. Победители олимпиады 2006 года (решили 3 задачи): второкурсники Айзенберг Антон, Дильман Глеб, Мешин Юрий и Шнурников Игорь.

Приведем задачи олимпиад по геометрии и топологии, а также ответы, указания и ссылки на полные решения. На олимпиадах разрешалось пользоваться без определения и доказательства понятиями и теоремами из программы 1–2 курса мехмата МГУ. Все остальные используемые определения требовалось явно приводить, а используемые теоремы — формулировать.

Задачи олимпиады 6.04.2005 (16.15–19.45)

1. На плоскости фиксированы точки $O, A_1, \ldots, A_s$ и числа $m_1, \ldots, m_s$. *Моментом инерции относительно прямой* l системы $A_1, \ldots, A_s$, $m_1, \ldots, m_s$ называется число

$$I(l) = m_1|A_1 l|^2 + \cdots + m_s|A_s l|^2,$$

где $|A_i l|$ — расстояние от точки A_i до прямой l. Будем рассматривать прямые l на плоскости, проходящие через точку O. Пусть I_+ и I_- — наибольшее и наименьшее значения момента инерции $I(l)$ (возможно, $I_+ = I_-$). Возьмем одну из прямых l_+, для которой $I(l_+) = I_+$. Докажите, что $I(l) = I_+ \cos^2\varphi + I_- \sin^2\varphi$, где $\varphi = \angle(ll_+)$.

2. Разрежьте бутылку Клейна так, чтобы получился (один) лист Мёбиуса. Бутылкой Клейна называется фигура, полученная из квадрата $ABCD$ склейкой противоположных сторон AB с CD и BC с AD (с учетом направления).

3. Какие правильные многогранники могут получиться в сечении четырехмерного куба трехмерной гиперплоскостью?

4. Докажите, что композиция осевых симметрий пространства относительно перпендикулярных скрещивающихся прямых является *винтовым движением*, т. е. композицией вращения на некоторый угол относительно некоторой направленной оси и параллельного переноса на вектор, параллельный этой оси. Найдите направленную ось, угол вращения и вектор переноса.

5. Пусть N — график непрерывной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Известно, что для любых чисел $s, t \in \mathbb{R}$ существует диффеоморфизм $M\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, для которого $M(N) = N$ и $M(s, f(s))) = (t, f(t))$. Верно ли, что функция f дифференцируема?

Примечания: функция с бесконечной производной в точке считается дифференцируемой в этой точке; отображение $M = (M_1, M_2)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

называется *диффеоморфизмом*, если оно взаимно однозначно, для M_1 и M_2 существуют частные производные всех порядков и

$$\frac{\partial M_1}{\partial x}\frac{\partial M_2}{\partial y}-\frac{\partial M_2}{\partial x}\frac{\partial M_1}{\partial y}\neq 0$$

в любой точке плоскости.

Задачи Олимпиады 13.04.2006 (16.30–20.00)

1. Пусть AB — наибольшая сторона треугольника ABC. Докажите, что для любой точки M плоскости выполнено неравенство $AM+BM+$ $+CM\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(BC+CA)$.

2. Найдите наибольшее целое n, для которого на плоскости существует кривая второго порядка, имеющая в точке $(0,1)$ касание n-го порядка с графиком функции $y=\cos x$.

Напомним [9, §§ 22, 23], что если P — общая точка параметризованных кривых $r_1(t)$ и $r_2(t)$, то говорят, что они имеют в этой точке *касание n-го порядка*, если первые n производных радиус-векторов $r_1(t)$ и $r_2(t)$ в точке P совпадают.

3. Пусть K — (двумерный) многоугольник на плоскости и a — вектор, для которого образ $K+a$ многоугольника K при сдвиге на вектор a не пересекается с K, т. е. $K\cap(K+a)=\varnothing$. Докажите, что два воза (т. е. круга диаметра $|a|$) не могут поменяться местами при непрерывном движении их центров по K, при котором возы не сталкиваются.

4. (a) Пусть $\gamma(t)$ — бесконечно дифференцируемая плоская кривая и $\alpha(t)$ — касательная к ней прямая в точке $P=\gamma(0)=\alpha(0)$. Предположим, что модули векторов скорости кривой $\gamma(t)$ и прямой $\alpha(t)$ равны единице в каждой точке (т. е. и кривая $\gamma(t)$, и прямая $\alpha(t)$ проходят путь длины τ за любой промежуток времени длины τ). Докажите, что модуль $|\gamma''(0)|$ ускорения кривой $\gamma(t)$ в точке P равен $\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\rho(\gamma(t),\alpha(t))$, где ρ — расстояние.

(b) Рассмотрим модель Пуанкаре геометрии Лобачевского в верхней полуплоскости [1, I.10.1], [7, §3], [6, §3]. Пусть $\gamma(t)$ — кривая с уравнением $y=1$ (горизонтальная евклидова прямая) и $\alpha(t)$ — касательная к $\gamma(t)$ прямая (в смысле геометрии Лобачевского) в точке $\gamma(0)=\alpha(0)=(0,1)$. Предположим, что и кривая $\gamma(t)$, и прямая $\alpha(t)$ проходят путь длины τ (в смысле геометрии Лобачевского) за любой промежуток времени длины τ. Вычислите величину $\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\rho(\gamma(t),\alpha(t))$, где ρ — расстояние на плоскости Лобачевского.

5. Для каждой пары целых чисел n и k выясните, сколько имеется (с точностью до движений и гомотетий) неупорядоченных наборов из k

ненулевых векторов в n-мерном евклидовом пространстве, сумма которых равна нулю и все попарные углы между которыми равны.

Ответы, указания и ссылки на полные решения

2005-1. Утверждение задачи вытекает из того, что момент инерции есть сумма функций вида $f(\varphi) = A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\sin^2\varphi$, а значит, и сам является функцией такого вида.

Комментарий. Аналогично получается элементарное доказательство *формулы Эйлера о кривизне нормального сечения поверхности*, см. формулировку и неэлементарное доказательство в [9, §55], [1, I.8.3].

2005-2. Надо резать по $BC = AD$.

2005-3. Ответ: тетраэдр, куб и октаэдр. Поскольку у четырехмерного куба восемь трехмерных граней, то у его сечения трехмерной гиперплоскостью не может быть более восьми двумерных граней. Кубом, правильным тетраэдром и правильным октаэдром являются сечения куба $-1 \leqslant x_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, 3, 4$, трехмерными гиперплоскостями $x_1 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$ и $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, соответственно.

2005-4. Ответ: осью является прямая l, содержащая общий перпендикуляр, угол вращения равен π, а длина вектора переноса равна удвоенной длине общего перпендикуляра. Для доказательства можно рассмотреть проекции на прямую l и на ортогональную ей плоскость.

2006-1. Пусть M' и B' — образы точек M и B при повороте на $\pi/3$ относительно точки C. Тогда

$$MA + MB + MC = AM + MM' + M'B' \geqslant AB' \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(CA + CB).$$

Здесь последнее неравенство следует по теореме косинусов из $\angle ACB' = \angle ACB + \pi/3 \geqslant 2\pi/3$.

Комментарий. Эта задача — простейший случай (для трехточечного множества) знаменитой гипотезы Гилберта – Поллака (1960): *отношение длины кратчайшего дерева, соединяющего данное конечное множество точек плоскости, к длине кратчайшего дерева без дополнительных вершин больше или равно* $\sqrt{3}/2$. Подробности см. в [3].

2006-2. Ответ: 5. Пусть график функции $y = \cos x$ задан в параметрической форме $x(t) = t$, $y(t) = \cos t$, а кривая второго порядка — уравнением $F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + px + qy + r = 0$, где $F(0, 1) = 0$. Чтобы найти порядок касания этих кривых в точке $(0, 1)$, рассмотрим функцию $\varphi(t) = F(x(t), y(t))$ и ее производные в точке $t = 0$. Если $\varphi'(0) = \varphi''(0) = \dots = \varphi^{(n)}(0) = 0$, то рассматриваемые кривые имеют касание n-го порядка [9, с. 110]. Вычисляя производные функции $\varphi(t) = at^2 + bt\cos t + c\cos^2 t + pt + q\cos t + r$ в точке $t = 0$ и приравнивая их к нулю (а также учитывая условие $\varphi(0) = 0$), получаем (однородную) систему линейных уравнений на коэффициенты a, b, c, p, q, r. Если приравнять к нулю производные до 5-го порядка включительно, то система имеет ненулевое решение, а при добавлении условия $\varphi^{(6)}(0) = 0$ ненулевых решений нет. Поэтому максимально возможный порядок касания равен 5. Он достигается для гиперболы $(y-4)^2 - 3x^2 = 9$.

Комментарий. Рассматриваемый пример является частным случаем общей задачи, которую можно сформулировать следующим образом: для данной кривой $\gamma(t)$ требуется найти кривую из некоторого семейства кривых (зависящих от параметров), которая наилучшим образом приближает $\gamma(t)$. Эту задачу можно решать аналогичным образом. Так, например, одно из определений кривизны кривой основано на рассмотрении семейства окружностей, касающихся кривой в данной точке [9].

2006-3. [13, §2], [11, глава 1].

2006-5. [5]. Ответ: одна при $n \geqslant k-1$ (это система векторов, соединяющих центр правильного $(k-1)$-мерного симплекса с его вершинами), ни одной при $n < k-1$.

Решение и обсуждение задачи 2005-5.

Ответ: да. Докажем это.

Возьмем точку $a \in \mathbb{R}^2 \setminus N$. Расстояние от a до N не равно нулю. Значит, существует точка $y \in N$, для которой $|a-y|$ равно этому расстоянию. Тогда открытый круг D с центром в a радиуса $|a-y|$ не пересекает N.

При любом $x \in N$ существует диффеоморфизм $M\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, переводящий y в x и N в N. Обозначим через R^φ поворот плоскости на угол φ вокруг начала координат. Обозначим через B_l равнобедренный треугольник (открытый двумерный) с вершиной в начале координат, углом $2\pi/l$ при вершине и высотой длины $1/l$, параллельной оси Oy. Так как M — диффеоморфизм, то $M(D) \supset x + R^\varphi B_l$ для некоторых l и φ. Поэтому

при любом $x \in N$ существуют такие l и φ, что $(x + R^\varphi B_l) \cap N = \varnothing$. $(*)$

Возьмем произвольную последовательность $\{\varphi_l\}$, всюду плотную на $[0, 2\pi]$. Обозначим

$$N_l := \{x \in N \mid (x + R^{\varphi_l} B_l) \cap N = \varnothing\}.$$

Ввиду условия $(*)$ имеем $N = \cup_{l=1}^{\infty} N_l$. Нетрудно проверить, что N_l *замкнуто в* N (докажите или см. детали в [15, лемма 3.1]). Значит, по

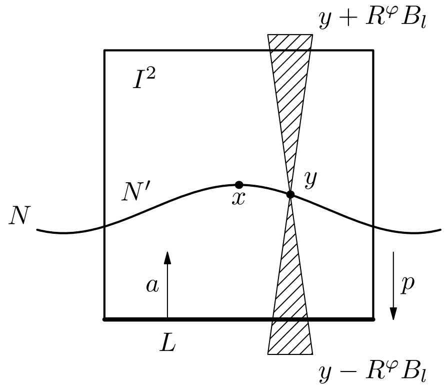

Рис. 1.

теореме Бэра о категории [2, 4] некоторое N_l содержит непустое открытое в N множество.

Поэтому существуют точка $x \in N$ и замкнутый квадрат I^2 со стороной меньше $1/l$ с центром в x, для которых $N' := N \cap I^2 \subset N_l$ (рис. 1). Тогда

$$[(y + R^{\varphi_l} B_l) \cup (y - R^{\varphi_l} B_l)] \cap N' = \varnothing \quad \text{при любом} \quad y \in N'. \qquad (**)$$

Действительно, если $z \in (y - R^{\varphi_l} B_l) \cap N'$, то $y \in (z + R^{\varphi_l} B_l) \cap N' \subset N_l$, что невозможно.

Можно считать, что угол между некоторой стороной L квадрата I^2 и осью Ox равен φ_l. Можно также считать, что N' связно и гомеоморфно отрезку (иначе заменим N' на малую окрестность точки $a \in N'$, которая гомеоморфна отрезку, поскольку N — график функции). Тогда ортогональная проекция множества N' на L содержит некоторый отрезок ненулевой длины. Можно считать, что этот отрезок совпадает с L (иначе уменьшим L).

Напомним, что отображение $q\colon L \to [0,1]$ называется *липшицевым*, если существует такое s, что $|q(x) - q(y)| < s|x - y|$ для любых двух различных точек $x, y \in L$. Из $(**)$ следует, что N' есть график некоторой липшицевой функции $q\colon L \to [0,1]$ (при естественном представлении $I^2 = L \times [0,1]$). Функция q имеет точку дифференцируемости [2, 4]. Значит, и исходная функция f имеет точку дифференцируемости. Тогда из существования диффеоморфизмов $M = M_{s,t}$ вытекает, что f дифференцируема в любой точке.

Комментарий. Какой формы могут быть ножны, чтобы из них можно было вытащить саблю? Математическая формулировка этого вопроса приводит к следующему понятию. Подмножество N трехмерного (или

m-мерного евклидова) пространства называется *римановo объемлемо однородным*, если для любых двух точек $x, y \in N$ существует движение (т. е. изометрия) $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, переводящее x в y и N в N. Хорошо известно, что *риманово объемлемо однородными кривыми в трехмерном пространстве являются только прямые, окружности и винтовые линии.*

А какой формы может быть электрический кабель, чтобы провод можно было вытащить из его обмотки (провод можно гнуть, но нельзя ломать)? Математическая формулировка этого вопроса приводит к следующему понятию. Подмножество N пространства $\mathbb{R}^m$ называется *дифференцируемо объемлемо однородным*, если *для любых двух точек $x, y \in N$ существует диффеоморфизм $h\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, переводящий x в y и N в N.* Непрерывность производной диффеоморфизма h не предполагается.

Напомним, что подмножество $N \subset \mathbb{R}^m$ называется *дифференцируемым подмногообразием*, если для любой точки $x \in N$ найдутся ее окрестность в $\mathbb{R}^m$, диффеоморфная $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$ (отождествим ее с $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$) и дифференцируемое инъективное отображение $q\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{m-k}$, график которого есть $N \cap (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k})$. (Это определение, удобное для доказательства нижеследующей теоремы, равносильно стандартному [8].) Например, график любой дифференцируемой функции $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является дифференцируемым подмногообразием плоскости $\mathbb{R}^2$, а образ канторова множества [8, 4.4] при произвольном вложении в плоскость не является дифференцируемым подмногообразием плоскости $\mathbb{R}^2$.

Нетрудно проверить, что любое дифференцируемое подмногообразие является дифференцируемо объемлемо однородным. Замечательно, что справедливо и обратное.

Теорема. *Если $N \subset \mathbb{R}^m$ замкнуто и дифференцируемо объемлемо однородно, то N является дифференцируемым подмногообразием* [14,15].

Кроме задачи 2005-5, эта теорема имеет следующее элементарное (но нетривиальное) следствие: *канторово множество не может быть дифференцируемо объемлемо однородно вложено в плоскость*. Другие интересные следствия приведены в [16].

Доказательство теоремы аналогично приведенному решению задачи 2005-5. См. [16], где доказательство проще предложенного в [14, 15].

Решение и обсуждение задачи 2006-4

Докажем утверждение пункта (а). Прямая $\alpha(t)$ задается уравнением $\alpha(t) = \alpha(0) + t\alpha'(0)$. Для кривой $\gamma(t)$ имеем

$$\gamma(t) = \gamma(0) + t\gamma'(0) + \frac{t^2}{2}\gamma''(0) + o(t^2) \quad \text{при } t \to 0.$$

Учитывая, что $\alpha(0)=\gamma(0)$ и $\alpha'(0)=\gamma'(0)$, получаем

$$\rho(\gamma(t),\alpha(t)) = |\gamma(t)-\alpha(t)| = \Big|\frac{t^2}{2}\gamma''(0)+o(t^2)\Big| = \frac{t^2}{2}|\gamma''(0)|+o(t^2).$$

Откуда и следует требуемое равенство $\dfrac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\rho(\gamma(t),\alpha(t)) = |\gamma''(0)|$.

Ответ к (b): 1.

Чтобы привести решение, напомним сначала стандартные факты из геометрии Лобачевского (в модели Пуанкаре на верхней полуплоскости с координатами (x,y), где $y>0$), которые мы будем использовать. Они входят в программу курса «Классическая дифференциальная геометрия» для второго курса мехмата МГУ [1, I.10.1]; [7, §3]; [6, §3]). Длина кривой $r(t)=(x(t),y(t))$, $t\in[a,b]$, на плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре ($y(t)>0$) равна $\int\limits_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}{y(t)}\,dt$. Прямыми для рассматриваемой модели плоскости Лобачевского являются (евклидовы) полуокружности, перпендикулярные оси x, и вертикальные полупрямые $y>0$. Расстояние между точками плоскости Лобачевского определяется как длина отрезка прямой с концами в этих точках (где слова «длина» и «прямая» понимаются в указанном выше смысле, т. е. в смысле геометрии Лобачевского). Если рассматривать точки плоскости Лобачевского как комплексные числа с положительной мнимой частью, то формулу для расстояния между точками z_1 и z_2 можно записать в следующем виде [6, задача 3.31]:

$$\rho(z_1,z_2) = \ln\frac{|z_2-\overline{z}_1|+|z_2-z_1|}{|z_2-\overline{z}_1|-|z_2-z_1|}.$$

Перейдем к решению пункта (b). В координатах (x,y) кривая $\gamma(t)$ имеет вид $\gamma(t)=(t,1)$. Действительно, образ этой параметризованной кривой какой нужно, а ее параметр равен длине дуги. Касательная прямая (Лобачевского) $\alpha(t)$ (к кривой $\gamma(t)$) в рассматриваемой модели является полуокружностью $x^2+y^2=1$, $y>0$. Вычислив длину дуги этой полуокружности в метрике Лобачевского, найдем ее параметризацию: $\alpha(t)=\Big(\dfrac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1},\dfrac{2e^t}{e^{2t}+1}\Big)$.

Используя приведенную выше формулу для расстояния между точками, можно явно выразить $\rho(\gamma(t),\alpha(t))$ через t. Поскольку нам нужна не сама эта функция, а лишь ее вторая производная в нуле, можно упростить вычисления, раскладывая $\alpha(t)$ в ряд по t и отбрасывая члены порядка выше 2. Получаем $\alpha(t)=\big(t,1-\dfrac{t^2}{2}\big)+o(t^2)$. Отсюда

$$\rho(\gamma(t),\alpha(t)) = \big|\ln\big(1-\frac{t^2}{2}\big)\big| + o(t^2) = \frac{t^2}{2}+o(t^2).$$

В итоге получаем ответ: $\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \rho(\gamma(t), \alpha(t)) = 1$.

Комментарий. Кривизна кривой в евклидовом пространстве обычно определяется как модуль вектора ускорения точки, движущейся вдоль этой кривой с единичной по модулю скоростью. А как определить кривизну кривой в «неевклидовом» пространстве (т. е. в пространстве с неевклидовой римановой метрикой)? Можно и здесь определить ее как длину вектора ускорения точки, движущейся вдоль этой кривой с единичной по модулю скоростью. Но для этого надо по-новому определить саму операцию дифференцирования в этом пространстве. Оказывается, нельзя определить вектор ускорения как вектор с координатами, равными вторым производным координат точки по времени. Определение «правильной» — *ковариантной* — операции дифференцирования см. в [10], [1, I, §§ 28,29], [12].

В задаче 2006-4 предлагается еще одно (менее распространенное) определение кривизны кривой. Пункт (a) лишь показывает, что в обычной ситуации это определение равносильно обычному. А в пункте (b) предлагается вычислить по этому определению кривизну кривой для конкретного примера (без использования формул ковариантного дифференцирования). Отметим, что точно так же кривизна кривой может быть определена в любом пространстве с римановой метрикой.

Список литературы

[1] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. *Современная геометрия: методы и приложения*. М.: Наука, 1979.

[2] Зорич В. А. *Математический анализ*. Том I. М.: МЦНМО, 2001. Том II. М.: МЦНМО, 1998.

[3] Иванов А. О., Тужилин А. А. *Теория экстремальных сетей*. М., Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

[4] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Функциональный анализ*. М.: Наука, 1976.

[5] Мирзоян В. А. *Структурные теоремы для Ric-полусимметрических подмногообразий и геометрическое описание одного класса минимальных полуэйнштейновых подмногообразий* // Матем. сб. Т. 197, №7, 2006. С. 47–76.

[6] Мищенко А. С., Соловьёв Ю. П., Фоменко А. Т. *Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии*. М.: Физматлит, 2004.

[7] Прасолов В.В. *Геометрия Лобачевского*. М: МЦНМО, 1995, 2000, 2004. См. также `http://www.mccme.ru/prasolov`.

[8] Прасолов В. В. *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии.* М.: МЦНМО, 2004.

[9] Рашевский П. К. *Курс дифференциальной геометрии.* М: УРСС, 2003.

[10] Рашевский П. К. *Риманова геометрия и тензорный анализ.* М: УРСС, 2004.

[11] Скопенков А. Б. *Алгебраическая топология с элементарной точки зрения.*
http://dfgm.math.msu.su/people/skopenkov/obstruct2.ps
http://www.mccme.ru/ium/s05

[12] Скопенков А. Б. *Основы дифференциальной геометрии в интересных задачах.* http://dfgm.math.msu.su/files/skopenkov/DIFGEOM.ps

[13] Cavicchioli A., Repovs D., Skopenkov A. B. *Open problems on graphs arising from geometric topology* // Topol. Appl. Vol. 84, 1998. P. 207–226.

[14] Repovš D., Skopenkov A. B., Ščepin E. V. *A characterization of C^1-homogeneous subsets of the plane* // Boll. Unione Mat. Ital. Vol. 7-A, 1993. P. 437–444.

[15] Repovs D., Skopenkov A. B., Scepin E. V. *C^1-homogeneous compacta in R^n are C^1-submanifolds of R^n* // Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 124, no 4, 1996. P. 1219–1226.

[16] Skopenkov A. *A characterization of submanifolds by a homogeneity condition.* Eprint, 2006. www.arxiv.org/math.GT/0606470

А. Б. Скопенков, кафедра дифференциальной геометрии и приложений, механико-математический факультет, Московский государственный университет, Москва, 119992, Россия; Независимый московский университет, Б. Власьевский, 11, Москва, 119002, Россия; Московский институт открытого образования.
E-mail: skopenko@mccme.ru

А. А. Ошемков, кафедра дифференциальной геометрии и приложений, механико-математический факультет, Московский государственный университет, Москва, 119992, Россия.
E-mail: oshemkov@mech.math.msu.su