О расположении точек на сфере и фрейме Мерседес–Бенц

М.Н. Истомина А.Б. Певный

Введение

Через $\langle x, y\rangle = x_1y_1+\dots+x_ny_n$ обозначим скалярное произведение векторов x, y из n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ — длина вектора x, $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$.

В содержательной статье Н. Н. Андреева и В. А. Юдина [1] рассматривается задача минимизации потенциальной энергии N отрицательных зарядов, расположенных на сфере S^2. Авторы оригинальным методом решили задачу при $N = 6$ и $N = 12$. О физической интерпретации задачи можно узнать на сайте `www.etudes.ru` в разделе «Задача Томсона». Аналогичная задача в n-мерном пространстве может быть сформулирована так.

Задача 1. Минимизировать функцию

$$W = W(x_1, \dots, x_N) = \sum_{(i,j):i\neq j} \frac{1}{|x_i - x_j|}$$

по всем наборам $(x_1, \dots, x_N)$ из N попарно различных точек сферы S^{n-1}.

Мы решим эту задачу при $N = n + 1$, но предварительно установим связь с задачей максимизации суммы расстояний точек на сфере (на эту связь также обращено внимание в [1]).

Воспользуемся известным неравенством между средним гармоническим и средним арифметическим положительных чисел $a_1, \dots, a_m$:

$$\frac{m}{\dfrac{1}{a_1} + \dots + \dfrac{1}{a_m}} \leqslant \frac{a_1 + \dots + a_m}{m},$$

откуда

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_m} \geqslant \frac{m^2}{a_1 + \dots + a_m}.$$

(Равенство достигается только тогда, когда $a_1 = \dots = a_m$.)

Отсюда получаем неравенство

$$W = \sum_{i \neq j} \frac{1}{|x_i - x_j|} \geqslant \frac{(N^2 - N)^2}{\sum_{i \neq j} |x_i - x_j|} \, . \tag{1}$$

Естественно рассмотреть следующую задачу.

Задача 2. Расположить N точек на сфере так, чтобы сумма попарных расстояний

$$S(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{(i,j):\, i \neq j} |x_i - x_j| \tag{2}$$

точек $x_1, \ldots, x_N$ сферы S^{n-1} была бы максимальной.

В некотором смысле задача 1 является подчинённой задаче 2, как показывает следующая лемма.

Лемма. *Пусть $X^* = (x_1^*, \ldots, x_N^*)$ — оптимальное решение задачи 2 и пусть при этом расстояния $d_{ij} = |x_i^* - x_j^*|$, $i \neq j$, равны между собой. Тогда набор $X^* = (x_1^*, \ldots, x_N^*)$ является решением задачи 1.*

Доказательство. Для произвольного набора $X = (x_1, \ldots, x_N)$ попарно различных точек сферы в силу (1) и (2) имеем

$$W(X) \geqslant \frac{(N^2 - N)^2}{S(X)} \geqslant \frac{(N^2 - N)^2}{S(X^*)} = W(X^*).$$

Последнее равенство следует из того, что $N^2 - N$ чисел $d_{ij} = |x_i^* - x_j^*|$, $i \neq j$, равны между собой. Лемма доказана.

В связи с этой леммой представляется разумным сначала решить задачу 2, и если в решении расстояния d_{ij} окажутся равными, то бесплатно получим решение задачи 1.

При $N = n+1$ решение задачи 2 интуитивно ясно. При $n = 2$ оптимальные точки будут располагаться в вершинах правильного треугольника, при $n = 3$ — в вершинах правильного тетраэдра, а при $n > 3$ — в вершинах правильного n-мерного симплекса.

Векторы, ведущие из начала координат в вершины симплекса, образуют фрейм Мерседес–Бенц.

В следующем разделе построим этот фрейм в явном формульном виде. Надеемся, что читателю будет интересно узнать, что значит модное слово «фрейм». Полученные формулы будут использованы при доказательстве оптимальности построенного решения задачи 2.

Фрейм Мерседес–Бенц в n-мерном пространстве

Система векторов $\{e_i\}_{i=1}^M$ в $\mathbb{R}^n$ называется жёстким фреймом в $\mathbb{R}^n$, если существует число $A > 0$ такое, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено равенство

$$\sum_{i=1}^{M}(\langle x, e_i\rangle)^2 = A|x|^2. \tag{3}$$

Из (3) следует, что $M \geqslant n$. Каждый вектор x можно разложить по фрейму. Действительно, в силу (3) справедливо тождество

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \frac{1}{4}\left[|x+y|^2 - |x-y|^2\right] = \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{M}(\langle x+y, e_i\rangle)^2 - \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{M}(\langle x-y, e_i\rangle)^2\right] = \\ &= \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{M}\langle x, e_i\rangle\langle y, e_i\rangle = \left\langle \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{M}\langle x, e_i\rangle e_i, y\right\rangle.\end{aligned}$$

Поскольку равенство выполнено для любого $y \in \mathbb{R}^n$, то

$$x = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{M}\langle x, e_i\rangle e_i. \tag{4}$$

Классическим примером жёсткого фрейма является фрейм Мерседес – Бенц в $\mathbb{R}^2$, состоящий из трёх векторов единичной длины, расположенных под углом $120°$:

$$e_1^2 = (0,1),\ e_2^2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right),\ e_3^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right). \tag{5}$$

Для него равенство (3) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{3}(\langle x, e_i^2\rangle)^2 = \frac{3}{2}|x|^2,\ x \in \mathbb{R}^2.$$

Характеристическим свойством этого фрейма является то, что углы между различными векторами равны $120°$.

Оказывается, для любого $n \geqslant 3$ можно построить аналогичную конструкцию в $\mathbb{R}^n$, которая называется каноническим фреймом Мерседес–Бенц.

Теорема 1. *Для любого $n \geqslant 2$ можно построить систему из $n+1$ векторов $\mathfrak{F}_n = \{e_1^n, e_2^n, \ldots, e_{n+1}^n\}$ со свойствами:*

1. $\langle e_i^n, e_j^n\rangle = -\dfrac{1}{n}, \quad i,j \in [1, n+1],\ i \neq j;$
2. $|e_i^n| = 1, \quad i \in [1, n+1];$
3. $\sum_{i=1}^{n+1} e_i^n = \mathbb{O}$;

4. *Система* $\mathfrak{F}_n$ *является жёстким фреймом с константой* $A = (n+1)/n$.

Доказательство. Индукция по n. При $n = 2$ фрейм (5) удовлетворяет всем утверждениям теоремы.

Допустим, что для $n-1$ все утверждения выполнены. Система $\mathfrak{F}_n$ получается из $\mathfrak{F}_{n-1}$ с помощью процедуры добавления.

Для $i \in [1, n]$ вектор e_i^n строится из e_i^{n-1} добавлением n-й компоненты $-h_n$ и нормированием получившегося вектора:

$$e_i^n = c_n(e_i^{n-1}, -h_n), \quad \text{где } c_n = \frac{1}{\sqrt{1+h_n^2}}.$$

Положим $e_{n+1}^n = (0, 0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$. По индуктивному предположению $\langle e_i^{n-1}, e_j^{n-1} \rangle = -\frac{1}{n-1}$, $i, j \in [1, n]$, $i \neq j$. Тогда

$$\langle e_i^n, e_j^n \rangle = \begin{cases} c_n^2(\langle e_i^{n-1}, e_j^{n-1} \rangle + h_n^2), & i, j \in [1, n],\ i < j, \\ -c_n h_n, & i \in [1, n],\ j = n+1. \end{cases}$$

Получим уравнение для определения h_n:

$$\frac{1}{1+h_n^2} \cdot \left(h_n^2 - \frac{1}{n-1}\right) = -c_n h_n = -\frac{h_n}{\sqrt{1+h_n^2}}\,.$$

Отсюда $h_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$, $c_n = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$. Тогда $\langle e_i^n, e_j^n \rangle = -\frac{1}{n}$, $i \neq j$. Имеем

$$|e_i^n|^2 = c_n^2(|e_i^{n-1}|^2 + h_n^2) = 1, \quad i \in [1, n];\ |e_{n+1}^n| = 1.$$

Так же просто проверяются свойства 3 и 4. Теорема доказана.

Замечания.

1. Угол φ_n между двумя различными векторами e_i^n и e_j^n находится из условия $\cos\varphi_n = \langle e_i^n, e_j^n \rangle = -\frac{1}{n}$, отсюда $\varphi_n = \arccos(-\frac{1}{n}) = \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{n}$, значит

$$\frac{2\pi}{3} = \varphi_2 > \varphi_3 > \cdots > \varphi_n > \cdots > \frac{\pi}{2}\,, \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} \varphi_n = \frac{\pi}{2}\,.$$

2. Избыточное количество векторов в разложении (4) повышает надежность при восстановлении вектора x по коэффициентам $c_i = \langle x, e_i^n \rangle$, $i \in [1, n+1]$. Если любой из коэффициентов $\{c_i\}_{i=1}^{n+1}$ будет утрачен, то по оставшимся вектор x восстановить можно.

   Допустим, что утрачен коэффициент $c_k = \langle x, e_k^n \rangle$ с некоторым номером $k \in [1, n+1]$. Рассмотрим систему

$$\{e_1^n, \ldots, e_{k-1}^n, e_{k+1}^n, \ldots, e_{n+1}^n\} \tag{6}$$

с выкинутым вектором e_k^n. В системе (6) скалярное произведение двух различных векторов равно $-\dfrac{1}{n}$, а норма каждого вектора равна 1. Поэтому матрица Грама системы (6) имеет вид

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1 & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Эта матрица имеет диагональное преобладание, поэтому $\det G \neq$ $\neq 0$ и, значит, система (6) линейно независима. Поэтому существует единственная система $\{\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_{k-1}, \widetilde{e}_{k+1}, \dots, \widetilde{e}_{n+1}\}$, биортогональная к (6), и вектор x восстанавливается по формуле

$$x = \sum_{i=1}^{k-1} c_i \widetilde{e}_i + \sum_{i=k+1}^{n+1} c_i \widetilde{e}_i.$$

3. Вопрос о восстановлении вектора x в случае, когда часть фреймовых коэффициентов утрачена, рассматривался во многих работах, см., например, [3]. Там же использовалось название Mercedes-Benz frame.

4. Из стандартного фрейма $\mathfrak{F}_n$ можно получить другие жесткие фреймы. Умножим все векторы фрейма на произвольную ортогональную матрицу Q и перед получившимися векторами в произвольном порядке расставим знаки $+$ и $-$:

$$\{\pm Q e_1^n, \pm Q e_2^n, \dots, \pm Q e_{n+1}^n\}. \tag{7}$$

Система (7) является жёстким фреймом.

Нерешенная задача. Доказать, что любой жёсткий фрейм с константой $\dfrac{n+1}{n}$, состоящий из $n+1$ единичных векторов, после некоторой перестановки элементов фрейма принимает вид (7).

Доказательство оптимальности

Определение. Набор из $n+1$ точек $M = \{e_1, \dots, e_{n+1}\} \subset S^{n-1}$ называется фреймом Мерседес–Бенц, если выполнены два условия:

1. $\langle e_i, e_j \rangle = -\dfrac{1}{n}$ при $i \neq j$; (8)

2. $\sum_{i=1}^{n+1} e_i = \mathbb{O}$.

Такое определение полезно для описания всего множества решений в задаче 2.

Теорема 2. *При $N = n+1$ решениями задачи 2 являются фреймы Мерседес–Бенц и только они.*

Доказательство. Возьмем произвольный фрейм Мерседес–Бенц M. Расстояния $d^*_{ij} = |e_i - e_j|$, $i \neq j$, равны между собой:

$$(d^*_{ij})^2 = |e_i|^2 + |e_j|^2 - 2\langle e_i, e_j\rangle = 2 + \frac{2}{n} = \frac{2n+2}{n}\,.$$

Количество чисел d^*_{ij}, $i \neq j$, равно $(n+1)^2 - (n+1) = n^2 + n$, поэтому

$$S(M) = (n^2+n)\sqrt{\frac{2n+2}{n}} = \sqrt{2}(n+1)\sqrt{n(n+1)}.$$

Для произвольного набора $X = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ точек сферы нужно доказать, что $S(X) \leqslant S(M)$. Для этого используем идею статьи [1]. Имеем $|x_i - x_j| = \sqrt{2}y(\langle x_i, x_j\rangle)$, где $y(t) = \sqrt{1-t}$. Поскольку $y''(t) < 0$ при $t < 1$, то $y(t)$ вогнута. Проведем касательную в точке $-\dfrac{1}{n}$:

$$h(t) = y\left(-\frac{1}{n}\right) + y'\left(-\frac{1}{n}\right)\left(t + \frac{1}{n}\right).$$

Тогда $y(t) \leqslant h(t)$ при всех $t \leqslant 1$. Легко подсчитать, что

$$h(t) = \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}} - \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}}t.$$

Итак,

$$|x_i - x_j| \leqslant \sqrt{2}h(\langle x_i, x_j\rangle). \tag{9}$$

Суммируя $n^2 + n$ слагаемых, получим

$$S(X) \leqslant \sqrt{2}(n^2+n)\frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}}\sum_{i\neq j}\langle x_i, x_j\rangle.$$

Легко видеть, что

$$\sum_{i\neq j}\langle x_i, x_j\rangle = \left|\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right|^2 - (n+1).$$

Поэтому

$$S(X) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{(2n+1)\sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n(n+1)} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\left|\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right|^2\right\} \tag{10}$$

Придем к неравенству

$$S(X) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{(2n+2)\sqrt{n(n+1)}\right\} = \sqrt{2}(n+1)\sqrt{n(n+1)} = S(M).$$

Значит, M — решение задачи 2.

Если X другое решение, $S(X) = S(M)$, то в (10) отброшенное слагаемое равно нулю: $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = \mathbb{O}$. Кроме того, в (9) будет равенство, а это возможно только при выполнении равенства $\langle x_i, x_j \rangle = -\frac{1}{n}$ при всех $i \neq j$. Значиит, X — фрейм Мерседес–Бенц. Теорема доказана.

Задачи

Опираясь на теорему 2, доказать, что в задачах 3–5 решениями являются фреймы Мерседес–Бенц и только они.

Задача 3. Расположить $n+1$ точек на сфере S^{n-1} так, чтобы произведение расстояний между ними стало максимальным. (Указание: используйте неравенство «среднее арифметическое $\geqslant$ среднего геометрического»).

Задача 4 (задача о диктаторах). Расположить $n+1$ точек на сфере S^{n-1} так, чтобы минимальное расстояние между ними стало максимальным. (Геометрическое решение этой задачи для $n = 3$ можно найти в [4, задача 120]).

Задача 5. При $N = n + 1$ минимизировать функцию

$$W(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{i \neq j} \frac{1}{|x_i - x_j|^{n-2}}$$

по всем наборам из N попарно различных точек сферы S^{n-1}, $n \geqslant 3$. (Указание: использовать неравенство «среднее порядка $m = -(n-2)$ не превосходит среднего арифметического». Эта задача решена в [5], там же решается задача при $N = 2n$).

Задача 6. Расположить N точек на сфере S^{n-1}, где $3 \leqslant N \leqslant n$, так, чтобы сумма расстояний между ними стала максимальной. Доказать, что векторы фрейма $\mathfrak{F}_{N-1}$ в $\mathbb{R}^{N-1}$, дополненные $n - N + 1$ нулями:

$$e_i = \left[e_i^{N-1}, 0, \ldots, 0\right], \quad i = 1, \ldots, N,$$

дают оптимальное решение задачи.

Авторы благодарят В. Н. Малозёмова и В. И. Звонилова за полезные замечания.

Список литературы

[1] Андреев Н. Н., Юдин В. А. *Экстремальные расположения точек на сфере* // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 1. 1997. С. 115–121.

[2] White L. L. *Unique arrangements of points on a sphere* // Amer. Math. Monhly. Vol. 59, no. 9. 1952. P. 606–611.

[3] Casazza P., Kovačević J. *Equal-norm tight frames with erasures* // Advances in Comp. Math. (Special issue on frames). 2002. P. 387-430.

[4] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. *Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии*. М.: Наука, 1974.

[5] Юдин В. А. *Минимум потенциальной энергии точечной системы зарядов* // Дискретная математика. 1992. Т. 4. Вып. 2. С. 115–121.

М.Н. Истомина, А.Б. Певный, кафедра прикладной математики, Сыктывкарский университет.