Геометрическое решение проблемы В. В. Произволова

Г. А. Гальперин

1. Проблема В. В. Произволова

В 1985 году, вскоре после завершения Батумской конференции по комбинаторной геометрии (см. [2]), известный математик В. В. Произволов ознакомил автора настоящей заметки с одной из его проблем, поставленной им в виде вопроса на только что прошедшей конференции, — о *покрытии* выпуклого n-угольника специальными треугольниками. Ее содержание составило в дальнейшем формулировку части (б) задачи 9, опубликованной В. В. Произволовым (на сей раз в утвердительной форме) в вып. 6 «Математического Просвещения» (см. [1]):[1)]

> *Дан выпуклый n-угольник и n точек внутри него. Каждой точке сопоставляется сторона n-угольника (разным точкам — разные стороны) и рассматриваются треугольники, построенные на точках и соответствующих сторонах. Докажите, что можно так установить соответствие, чтобы получившиеся треугольники покрывали внутренность многоугольника.*

Задача показалась мне тогда настолько привлекательной, что уже через короткое время (порядка месяца или даже менее того) я нашел простое и элементарное геометрическое ее решение, причем сразу в многомерном случае, когда вместо многоугольника рассматривается многогранник $\mathcal{M}$ в N-мерном пространстве, а вместо сторон многоугольника — грани $\mathcal{M}$ коразмерности 1. При этом интуиция с самого начала подсказывала мне, что ответ на исходный вопрос «Всегда ли существует искомое соответствие между точками и сторонами?» должен быть положительным, так что я сразу стал пытаться найти доказательство, а не строить контрпримеры к утверждению. Несколько позднее я выяснил,

[1)] Задачу (а) о *непокрытии* многоугольника специальными треугольниками мы здесь не рассматриваем; см. ее формулировку в [1] и решение в [4].

что расположение n точек по отношению к многограннику несущественно: они могут находиться как внутри, так и вне (а частично и на границе) многогранника (см. обобщение проблемы в разделе 7 настоящей статьи).

Полное решение этой проблемы и некоторых ее обобщений я представил в виде статьи в Доклады Академии Наук СССР в ноябре 1985 года; сама же статья появилась в печати лишь через два года — в 1987 году (см. [3]). Ниже я привожу решение проблемы Произволова для многоугольника, опуская все ее многомерные модификации (подробно изложенные в [3]). В отличие от комбинаторного решения, представленного в статье [4], приводимое мной решение чисто геометрическое, базирующееся на геометрической лемме из раздела 4. Сейчас же я начну с руководящей геометрической идеи, которая и составляет суть решения проблемы; все последующие рассмотрения и рассуждения (в том числе и основная геометрическая лемма) лишь оттеняют и детализируют эту основную идею.

2. Идея решения

Занумеруем от 1 до n как заданные точки, так и стороны многоугольника. Обозначим занумерованные точки латинскими буквами M_1, $M_2, \dots, M_n$, а стороны многоугольника — греческими $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$. Если точке M_i сопоставлена сторона Γ_j, то треугольник $\triangle M_i\Gamma_j$ будем обозначать для краткости α_{ij} и называть его «треугольником с вершиной M_i и основанием Γ_j». Мы будем мыслить бесконечное продолжение этого треугольника — угол с вершиной M_i — как прожектор, освещающий сторону Γ_j (а вместе с ней и сам треугольник $\triangle M_i\Gamma_j$, и оставшуюся часть плоскости внутри угла). Этот прожектор будем обозначать тем же самым значком α_{ij}. Вопрос состоит в таком сопоставлении $k \leftrightarrow i_k$, чтобы все n прожекторов $\{\alpha_{ki_k}\}$ полностью осветили многоугольник.

Итак, каждой конфигурации прожекторов соответствует однозначно определенная перестановка $(i_1, i_2, \dots, i_n)$, и наоборот, каждой такой перестановке отвечает ровно один набор прожекторов $(\alpha_{1i_1}, \alpha_{2i_2}, \dots, \alpha_{ni_n})$. Всего имеется ровно $n!$ перестановок, и мы хотим доказать, что для какой-то одной из них весь многоугольник будет полностью освещен соответствующими этой перестановке прожекторами. Для этого хорошо бы найти какую-нибудь характеристику, или *качество*, перестановки (и, тем самым, соответствующего ей набора прожекторов), чтобы в дальнейшем перестановки можно было бы сравнивать друг с другом. Если такое сравнение удастся сделать, то затем можно будет постепенно улучшать перестановку, заменяя в предыдущем расположении некоторые из прожекторов на новые.

Замысел как раз именно в том и состоит, чтобы, научившись сравнивать перестановки, начать с какой-то одной из них — проще всего с тождественной (в которой сопоставление «номер точки $\leftrightarrow$ номер стороны» тождественное: $k \leftrightarrow k$) — и постепенно улучшать ее качество, делая «правильные» замены прожекторов, при которых ранее освещенные точки многоугольника оставались бы по-прежнему освещенными, но к ним добавлялись бы (т. е. оказывались бы освещенными) и некоторые ранее не освещенные точки (хотя бы одна!). Поскольку число перестановок конечно, имеется перестановка с *максимальным* качеством. Мы утверждаем, что отвечающий ей набор прожекторов искомый: прожектора из этого набора полностью освещают многоугольник. Почему? Если бы это было не так, мы смогли бы улучшить качество перестановки, увеличив множество освещенных точек многоугольника некоторой заменой прожекторов. Однако это невозможно, поскольку качество набора должно при такой замене увеличиться, а оно уже максимально возможное. Полученное противоречие и даст решение задачи.

Итак, замысел ясен, осталось придумать понятие «качество перестановки», увеличивающееся при одновременном увеличении множества освещенных точек. В качестве пробы я брал общую освещенную площадь многоугольника; сумму площадей освещенных треугольников; альтернированную сумму площадей; и др. Однако каждый раз находился какой-нибудь контрпример к идее замысла. В конце концов функцию качества перестановки удалось придумать, и она оказалось довольно хитрой и нелинейной: *для перестановки* $\pi = \{\alpha_{ki_k}\}$ *— это произведение* $F(\pi) = \prod_{k=1}^{n} h_{ki_k}$ *высот всех треугольников* $\{\alpha_{ki_k}\}$, *опущенных из вершин* M_k *на стороны* Γ_{i_k} $(k = 1, 2, \ldots, n)$. (См. рис. 1.) Вместо произведения высот всех треугольников можно было бы взять эквивалентную ей функцию: *произведение площадей всех освещенных треугольников* $\{\alpha_{ki_k}\}$ (которая получается домножением функции $F(\pi)$ на произведение длин всех сторон

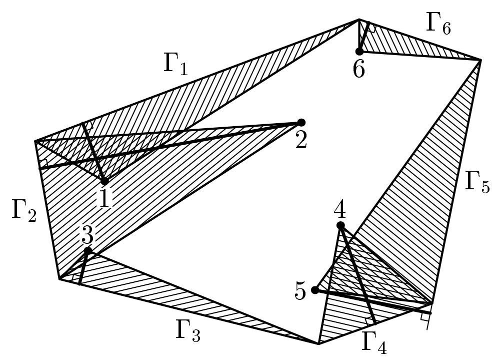

Рис. 1. *Качество перестановки прожекторов-пирамид: произведение высот всех n пирамид*

многоугольника), однако исходная функция $F(\pi)$ в дальнейшем доказательстве окажется более удобной для доказательства.

Теперь нужно только осуществить описанный выше замысел: для данного набора прожекторов и отвечающей ему перестановки придумать процедуру замены этого набора другим, но с лучшей функцией качества перестановки и с бо́льшим множеством освещенных внутри многоугольника точек.

3. Процедура улучшения качества перестановки

Без ограничения общности достаточно научиться «улучшать» качество тождественной перестановки ε. (Действительно, перестановку $\pi = \{k \leftrightarrow i_k\}$ можно, перенумеровав стороны многоугольника, превратить в тождественную $\varepsilon = \{k \leftrightarrow k\}$.)

Мы начинаем с набора прожекторов $\{\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{nn}\}$, которые по предположению освещают лишь часть многоугольника. Пусть точка A внутри многоугольника не освещена ни одним из этих прожекторов.

Возьмем прожектор α_{11}. Он освещает сторону Γ_1 и не освещает точку A. Оставив его вершину M_1 неизменной, заменим основание Γ_1 треугольника $\triangle M_1\Gamma_1$ на основание Γ_{i_1}, для которого треугольник $\triangle M_1\Gamma_{i_1}$ содержит точку A (треугольник, как и угол-прожектор, считается замкнутым, т. е. стороны принадлежат ему; и если точка A принадлежит сразу двум треугольникам, то берем любой из них; в противном случае по точке A треугольник $\triangle M_1\Gamma_{i_1}$ определяется однозначно). Заменим прожектор $\alpha_{11} = M_1\Gamma_1$ на прожектор $\alpha_{1i_1} = M_1\Gamma_{i_1}$, которой уже освещает A, а исходный прожектор α_{11} временно уберем.

По индексу i_1 найдем тот прожектор $\alpha_{i_1i_1}$ из исходного набора, который освещает сторону Γ_{i_1}, но не освещает точку A. Уберем в сторону этот прожектор, заменяя его на новый (единственный, если точка A не лежит на общей стороне двух треугольников) $\alpha_{i_1i_2} = M_{i_1}\Gamma_{i_2}$, который теперь уже освещает точку A. Теперь сторона Γ_{i_2} принадлежит сразу двум прожекторам, $\alpha_{i_1i_2}$ и $\alpha_{i_2i_2}$, но первый из них освещает точку A, а второй — нет. Убираем в сторону этот второй, а для вершины M_{i_2} находим такую сторону Γ_{i_3} многоугольника, что прожектор $\alpha_{i_2i_3} = M_{i_2}\Gamma_{i_3}$ освещает точку A. Теперь убираем в сторону прожектор $\alpha_{i_3i_3}$, а для вершины M_{i_3} находим такую сторону Γ_{i_4}, что прожектор $\alpha_{i_3i_4} = M_{i_3}\Gamma_{i_4}$ освещает точку A.

Так поступаем и дальше, пока это возможно. Но описанный процесс принципиально конечный; на каком-то шаге k мы обнаружим, что прожектор $\alpha_{i_ki_k}$ следует заменить на прожектор $\alpha_{i_ki_p}$ с $p < k$, т. е. на прожектор, который освещает точку A, но освещает также и сторону Γ_{i_p}, участвовавшую в одном из предыдущих прожекторов, — а именно, в прожекторе $\alpha_{i_{p-1}i_p}$.

В этом случае поступаем так: первые p замененных прожекторов α_{1i_1}, $\alpha_{i_1i_2}, \ldots, \alpha_{i_{p-1}i_p}$ заменяем обратно на исходные прожектора $\alpha_{11}, \alpha_{i_1i_1}, \ldots, \alpha_{i_{p-1}i_{p-1}}$, а остальные $k-p+1$ замененных прожекторов $\alpha_{i_pi_{p+1}}, \alpha_{i_{p+1}i_{p+2}}, \ldots, \alpha_{i_ki_p}$ оставляем на месте.

Для этих $k-p+1$ прожекторов мы имеем следующее:

▷ каждый из них освещает точку A;

▷ основания соответствующих треугольников образуют цикл: прожектор $\alpha_{i_pi_{p+1}}$ с вершиной M_{i_p} освещает сторону $\Gamma_{i_{p+1}}$; прожектор $\alpha_{i_{p+1}i_{p+2}}$ с вершиной $M_{i_{p+1}}$ освещает сторону $\Gamma_{i_{p+2}}$; и так далее: прожектор $\alpha_{i_{k-1}i_k}$ с вершиной $M_{i_{k-1}}$ освещает сторону Γ_{i_k} и, наконец, прожектор $\alpha_{i_ki_p}$ с вершиной M_{i_k} освещает сторону Γ_{i_p}.

В результате возникает перестановка $\sigma = (i_p \to i_{p+1} \to i_{p+2} \to \ \ldots \ \to i_k \to i_p)$, которая совпадает с исходной ε (тождественной) везде, кроме идущих подряд позиций от p до k (напоминаем, что $k > p$).

Утверждение. *Качество перестановки σ лучше, чем качество исходной (тождественной) перестановки ε: $F(\sigma) > F(\varepsilon)$.*

Доказательство этого утверждения (см. раздел 5) будет легко следовать из центральной для всей заметки геометрической леммы, которой посвящен следующий раздел.

4. Геометрическая лемма

Лемма. *Пусть M и A — две произвольные точки внутри выпуклого многоугольника со сторонами $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$, и пусть точка A содержится внутри треугольника $\triangle M\Gamma_1$. Пусть $h_1, h_2, \ldots, h_n$ — высоты треугольников $\triangle M\Gamma_1, \triangle M\Gamma_2, \ldots, \triangle M\Gamma_n$, опущенные из вершины M на стороны многоугольника или их продолжения, а $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — расстояния от точки A до прямых, содержащих эти стороны. Тогда при всех $i = 2, 3, \ldots, n$ справедливо неравенство*:

$$\frac{h_1}{r_1} > \frac{h_i}{r_i} \quad (\textit{см. рис. } 2). \tag{1}$$

Доказательство. Поскольку точка A лежит внутри треугольника $\triangle M\Gamma_1$, она не лежит внутри треугольника $\triangle M\Gamma_i$. Следовательно, луч $\overrightarrow{MA}$ с вершиной M пересекает сторону Γ_1 многоугольника и не пересекает его сторону Γ_i (рис. 2). Обозначим через B_1 точку пересечения луча $\overrightarrow{MA}$ со стороной Γ_1, а через M_1 и A_1, M_i и A_i — ортогональные проекции точек M и A на прямые, содержащие стороны Γ_1 и Γ_i, соответственно.

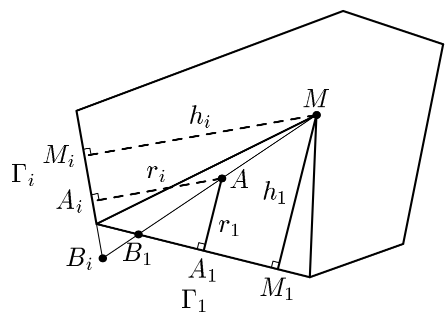

Рис. 2. *Геометрическая лемма:* $\dfrac{h_1}{r_1} > \dfrac{h_i}{r_i}$, $i = 2, \ldots, n$

Из подобных прямоугольных треугольников $\triangle MM_1B_1$ и $\triangle AA_1B_1$ находим, что

$$\frac{h_1}{r_1} = \frac{MB_1}{AB_1} = 1 + \frac{MA}{AB_1}\,. \tag{2}$$

Рассмотрим теперь пересечение луча $\overrightarrow{MA}$ с прямой ℓ_i, содержащей сторону Γ_i. Может случиться так, что это пересечение пусто — такое произойдет либо когда $\overrightarrow{MA} \| \Gamma_i$, либо когда луч $\overrightarrow{MA}$ расходится с прямой ℓ_i (а, следовательно, обратный ему луч $\overrightarrow{AM}$ пересекается с прямой ℓ_i). В первом случае $h_i/r_i = 1$, а во втором $h_i/r_i < 1$, и неравенство (1) выполнено автоматически: левая его часть строго превосходит 1, а правая не превосходит 1.

Если же пересечение рассмотренных луча и прямой не пусто, то точку их пересечения обозначим $B_i = \overrightarrow{MA} \cap \Gamma_i$. Эта точка B_i лежит на продолжении отрезка MB_1, поэтому $AB_i > AB_1$. Далее рассуждаем как и раньше: из подобных прямоугольных треугольников $\triangle MM_iB_i$ и $\triangle AA_iB_i$ (рис. 2) имеем

$$\frac{h_i}{r_i} = \frac{MB_i}{AB_i} = 1 + \frac{MA}{AB_i}\,; \tag{3}$$

следовательно, сравнивая равенства (2) и (3), видим (с учетом $AB_i > AB_1$), что $h_1/r_1 > h_i/r_i$, что и требовалось доказать. $\square$

5. Доказательство утверждения: $F(\sigma) > F(\varepsilon)$

В результате перестановки $\sigma = (i_p \to i_{p+1} \to i_{p+2} \to \cdots \to i_k \to i_p)$ все новые (замененные) прожектора $\alpha_{i_p i_{p+1}}, \alpha_{i_{p+1} i_{p+2}}, \ldots, \alpha_{i_k i_p}$ начинают освещать точку A, которую исходные прожектора $\alpha_{p i_p}, \alpha_{p+1 i_{p+1}}, \ldots, \alpha_{k i_k}$ до этого не освещали. Стало быть, к ним можно применить геометрическую лемму и записать:

$$\frac{h_{i_p i_{p+1}}}{r_{i_{p+1}}(A)} > \frac{h_{i_p i_p}}{r_{i_p}(A)}\,; \quad \frac{h_{i_{p+1} i_{p+2}}}{r_{i_{p+2}}(A)} > \frac{h_{i_{p+1} i_{p+1}}}{r_{i_{p+1}}(A)}\,; \quad \ldots; \quad \frac{h_{i_k i_p}}{r_{i_p}(A)} > \frac{h_{i_k i_k}}{r_{i_k}(A)}\,. \tag{4}$$

А тогда произведение левых частей неравенств (4) строго больше произведения их правых частей. Поэтому, если разделить произведение высот *всех* n треугольников перестановки σ на произведение *всех* n расстояний от точки A до сторон многоугольника, то полученное число будет больше, чем если разделить произведение высот *всех* n треугольников перестановки ε на то же произведение *всех* n расстояний от точки A до сторон многоугольника (мы добавили в произведение неравенств (4) оставшиеся аналогичные факторы, одинаковые для обеих перестановок):

$$\frac{F(\sigma)}{\prod_{k=1}^{n} r_{i_k}(A)} > \frac{F(\varepsilon)}{\prod_{k=1}^{n} r_{i_k}(A)}\,. \tag{5}$$

Осталось заметить, что в (5) знаменатели дробей одинаковы, откуда и вытекает искомое неравенство $F(\sigma) > F(\varepsilon)$. Утверждение полностью доказано. □

6. Завершение решения проблемы

Итак, мы доказали, что если точка A многоугольника не освещена, то в результате описанной в разделе 3 циклической перестановки прожекторов она уже будет освещена, причем качество $F(\sigma)$ новой перестановки будет строго превосходить качество $F(\varepsilon)$ исходной.

Возьмем теперь перестановку λ с *максимальным* качеством: $F(\lambda) = \max_\omega F(\omega)$, и докажем, что весь многоугольник освещен прожекторами, отвечающими этой перестановке.

Действительно, если какая-то точка A многоугольника не освещена, то ее можно осветить новым набором прожекторов, которому отвечает перестановка с лучшим чем у перестановки λ качеством, а это невозможно в силу определения перестановки λ. Следовательно, все точки многоугольника освещены, что и требовалось доказать. □

7. Обобщение

В приведенном выше доказательстве мы существенно использовали то обстоятельство, что все n исходных точек находились *внутри* многоугольника: на этом предположении базируется доказательство геометрической леммы (раздел 4).

Если же часть исходных точек находится снаружи многоугольника, то утверждение проблемы по-прежнему остается положительным, а ее решение может быть несколько модифицировано следующим образом.

Вместо того, чтобы рассматривать *все* $n!$ *возможных перестановок*, рассмотрим лишь их часть, Ω. В Ω включим только те наборы перестановок прожекторов α_{ki_k}, в которых число прожекторов, вовсе не освещающих многоугольник, *минимально возможное*. (Очевидно, что это минимально возможное число одно и то же для всех перестановок, входящих в Ω, потому что из двух неравных наборов в Ω остается меньший из них.)

Если набор прожекторов из Ω не покрывает полностью многоугольника и, например, точка A внутри него не освещена, то совершив, как и выше в разделе 3, циклическую перестановку $\sigma = (i_p \to i_{p+1} \to i_{p+2} \to \cdots \to i_k \to i_p)$, после которой точка A уже освещена, мы видим, что все прожекторы из этой циклической перестановки пересекаются с многоугольником. А тогда каждый из прожекторов, замененный на какой-то прожектор из перестановки σ, также пересекался с многоугольником, так как в противном случае число прожекторов, не освещающих многоугольник, могло бы быть уменьшено за счет указанной циклической замены и тогда бы указанная циклическая перестановка не принадлежала бы множеству Ω, что давало бы противоречие с определением Ω. Следовательно, множество Ω инвариантно по отношению к процедуре улучшения качества перестановки.

Чтобы завершить доказательство модифицированной проблемы, достаточно усмотреть, что геометрическая лемма остается справедливой и для прожекторов, пересекающихся с многоугольником, что дает в дальнейшем неравенство (5), а с ним и неравенство $F(\sigma) > F(\varepsilon)$ (для перестановок из Ω). Тогда для перестановки $\lambda \in \Omega$ с *наилучшим качеством* соответствующий ей набор прожекторов осветит многоугольник целиком.

Список литературы

[1] Математическое просвещение. Третья серия, вып. 6. М.: МЦНМО, 2002. С. 134.

[2] Первая конференция по комбинаторной геометрии и ее приложениям, тезисы сообщений / Под ред. В. Г. Болтянского. Батуми, 1985.

[3] Г. А. Гальперин, *Решение задачи Произволова о покрытии многомерного многогранника пирамидами, и ее обобщение* // ДАН СССР, 1987. Т. 293, №2. С. 283–288.

[4] Ф. В. Петров, С. Е. Рукшин, *Теоремы о покрывающих и непересекающихся треугольниках и их обобщения* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 8. 2004. С. 222–228.