Ширина многоугольника

М. Л. Гервер*

Если вырезанный из картона выпуклый многоугольник можно, непрерывно двигая по столу, протащить между двумя гвоздями, вбитыми в стол на расстоянии 1, то тогда его можно протащить и между гвоздями, вбитыми на расстоянии $r > 1$. Верно ли то же самое и для любого невыпуклого многоугольника, — например, для такого, как на рис. 1?

Библиография: 2 названия.

При дополнительных ограничениях (которым многоугольник M на рис. 1 не удовлетворяет) утвердительный ответ на вопрос из аннотации получили в [1] J. E. Goodman, J. Pach и C. K. Yap. Методы и результаты работы [1] послужили основой для построений настоящей статьи.

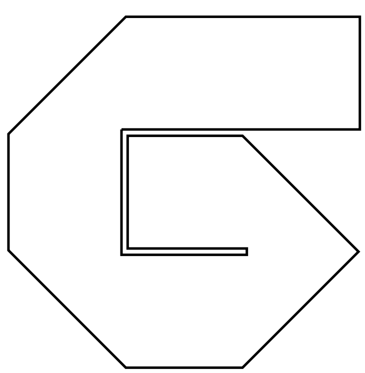


Рис. 1

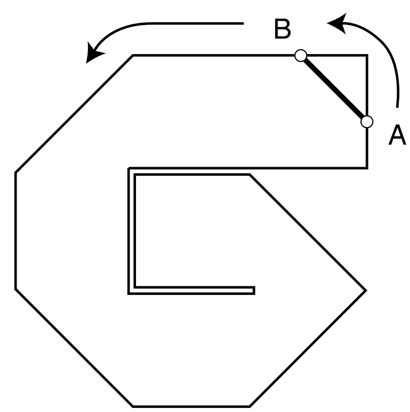


Рис. 2

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-01852).

1. Теорема двойственности

Минимальное расстояние w_M между двумя точками в $\mathbb{R}^2$, позволяющее протащить плоский многоугольник M между ними, назовем *шириной* M (можно доказать, что для выпуклого многоугольника данное определение совпадает со стандартным: w_M — наименьшее расстояние между параллельными прямыми, опорными к M).

Из новых результатов, полученных в статье, отметим следующий.

Пусть A и B — две точки на границе P многоугольника M (рис. 2). Ясно, что если длина d отрезка AB не слишком велика, то его можно непрерывно протащить вдоль P — так, что его концы A и B всё время будут находиться на P и отрезок AB, сделав полный оборот вокруг M, вернется в исходное положение.

Спрашивается: каково максимальное значение d_M длины d, допускающее такое перемещение концов отрезка по границе M?

Оказывается, d_M в точности равно ширине w_M многоугольника M.

Чтобы доказать эту теорему двойственности и решить задачу, сформулированную в аннотации, рассмотрим ряд подготовительных, вспомогательных задач.

2. Возы и машины. Фазовое пространство

Разобраться с задачами о ширине многоугольника нам, в первую очередь, поможет прием, используемый в [2] при решении следующей задачи Н. Н. Константинова.

Две непересекающиеся дороги ведут из города C_1 в город C_2. Известно, что две машины, связанные веревкой длины $2L$, могут проехать из C_1 в C_2 (по разным дорогам), не порвав веревки. Смогут ли разминуться два круглых воза радиуса $R > L$, если их центры движутся по тем же дорогам навстречу друг другу?

Решение. Вот — решение этой задачи, приведенное в [2, с. 8,9]. Рассмотрим квадрат

$$K = \{(x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i = 1, 2\}.$$

Положение двух экипажей (один — на 1-й дороге, другой — на 2-й) можно характеризовать точкой квадрата K: достаточно обозначить через x_i долю расстояния от C_1 до C_2 по i-той дороге, заключённую между C_1 и находящимся на этой дороге экипажем.

Всевозможным положениям экипажей соответствуют всевозможные точки квадрата K. Этот квадрат называется *фазовым пространством*,

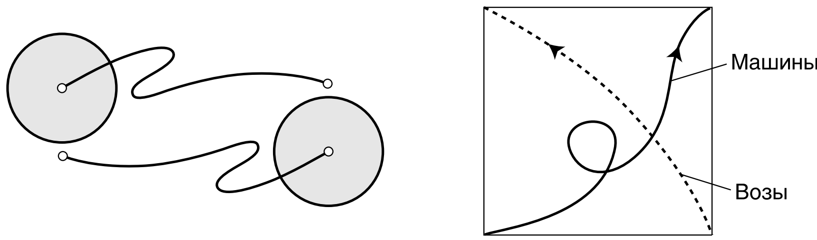


Рис. 3

а его точки — *фазовыми точками*. Таким образом, каждая фазовая точка соответствует определенному положению пары экипажей, а всякое движение экипажей изображается движением фазовой точки в фазовом пространстве.

Например, начальное положение машин (в городе C_1) соответствует левому нижнему углу квадрата K ($x_1 = x_2 = 0$), а движение машин из C_1 в C_2 изображается кривой, ведущей в противоположный угол.

Точно так же начальное положение возов (один — на 1-й дороге на выезде из C_2, другой — на 2-й дороге на выезде из C_1, рис. 3) соответствует правому нижнему углу квадрата K ($x_1 = 1$, $x_2 = 0$), а движение возов изображается кривой, ведущей в противоположный угол квадрата.

Но всякие две кривые в квадрате, соединяющие разные пары противоположных вершин, пересекаются. Поэтому, как бы ни двигались возы, наступит момент, когда пара возов займёт положение, в котором была в некоторый момент времени пара машин. В этот момент расстояние между центрами возов будет меньше $2R$. Итак, возам не удастся разминуться.

3. Многоугольник с ручкой и его ширина

Пусть полупрямая H (рис. 4 на след. стр.) имеет единственную общую точку с границей P многоугольника M. Объединение P и H обозначим через P_H и будем называть *многоугольником с ручкой* (взамен более точных, но тяжеловесных *контур* или *граница многоугольника с ручкой*), а саму полупрямую H будем называть *ручкой*.

С изучаемыми вопросами тесно связаны следующие задачи.

1. *Пусть A_0 и B_0 — две произвольные точки на ручке H. Доказать, что существует пара непрерывных отображений*

$$a:\ t \in [0;1] \to A = a(t) \in P_H, \quad b:\ t \in [0;1] \to B = b(t) \in P_H,$$

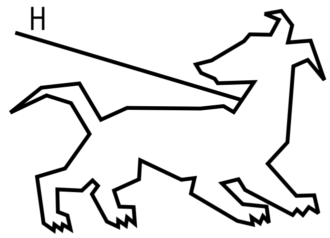


Рис. 4

обладающая следующими свойствами:
– при $t = 0$ точки A и B занимают положения A_0 и B_0;
– при изменении t от 0 до 1 расстояние $|AB|$ остается неизменным;
– при изменении t от 0 до 1 по крайней мере одна из точек A и B обходит P (т.е. двигаясь непрерывно, но не обязательно монотонно — то по часовой, то против часовой стрелки — делает полный оборот вокруг M);
– при $t = 1$ отрезок AB совпадает с отрезком A_0B_0 — так что либо

$$A_1 = a(1) = A_0, \quad B_1 = b(1) = B_0, \tag{1}$$

либо

$$A_1 = a(1) = B_0, \quad B_1 = b(1) = A_0. \tag{2}$$

2. *Доказать, что условия (1) или (2) выполняются в зависимости от того, какова длина отрезка A_0B_0: существует такое w, что при $|A_0B_0| > w$ выполняется (1), а при $|A_0B_0| < w$ выполняется (2).*

3. *Верно ли, что при $|A_0B_0| = w$ существуют обе пары отображений: и такая, что выполняется (1), и такая, что выполняется (2)?*

Определение. Число w назовем *шириной* многоугольника с ручкой P_H.

Дальнейшие построения оправдают выбор этого термина, а пока возникает вопрос:

4. *Зависит ли ширина P_H от расположения ручки H? Подробнее: пусть H^* — любая полупрямая, имеющая единственную общую точку с границей P многоугольника M. Объединим P с H^* и ширину полученного многоугольника с ручкой P_{H^*} обозначим через w^*. Равны ли между собой w и w^*?*

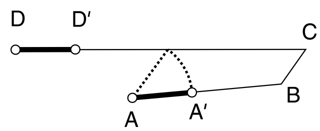


Рис. 5

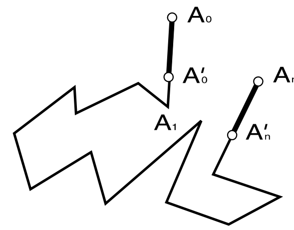


Рис. 6

4. Движение отрезка по ломаной

Прежде чем перейти к решению задач 1–4, обсудим следующее утверждение.

5. *Пусть $ABCD$ — несамопересекающаяся трёхзвенная ломаная линия, причем звенья AB и CD имеют (каждое) длину больше 1. Пусть A' и D' — такие точки на звеньях AB и CD, что $|AA'| = |D'D| = 1$. Тогда отрезок длины 1 можно так переместить из положения AA' в положение $D'D$, что концы отрезка будут непрерывно двигаться по ломаной $ABCD$.*

Из рис. 5 ясно, что утверждение 5 неверно.

6. *Станет ли утверждение 5 верным не только для трёхзвенной ломаной, но даже для n–звенной ломаной $A_0A_1\ldots A_n$, если дополнительно потребовать, чтобы все точки ломаной, лежащие на расстоянии $\leqslant 1$ от A_0, принадлежали её начальному звену A_0A_1, а все точки ломаной, лежащие на расстоянии $\leqslant 1$ от A_n, принадлежали её конечному звену?*

Решение задачи 6 (см. разд. 5) поможет лучше понять задачи 1–4 и, в частности, объяснить, *зачем к многоугольнику приделана ручка.*

5. Решение задачи о движении отрезка по ломаной. Граф Г

Пусть *все точки несамопересекающейся n-звенной ломаной $P = A_0A_1\ldots A_n$, лежащие на расстоянии $\leqslant 1$ от A_0, принадлежат её начальному звену A_0A_1, а все точки ломаной P, лежащие на расстоянии $\leqslant 1$ от A_n, принадлежат её конечному звену.* Обозначим через A'_0 и через A'_n точки P на расстоянии 1 от A_0 и от A_n и, следуя [1], докажем, что отрезок длины 1 можно непрерывно переместить из положения $A_0A'_0$ в положение A'_nA_n, двигая концы отрезка по ломаной P (рис. 6).

Пусть L — длина ломаной P и пусть AB — произвольный отрезок длины 1 с концами на P. Длины ломаных A_0A и A_0B (измеренные вдоль P)

обозначим через L_1 и L_2 и положим (сравним с разд. 2)

$$x_1 = L_1/L, \quad x_2 = L_2/L. \tag{3}$$

Поступив так с *каждым* отрезком длины 1 с концами на P, получим некоторое множество Γ точек с координатами (3) в *фазовом пространстве*, т.е. в квадрате

$$K = \{(x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i = 1, 2\}.$$

В частности, отрезкам A_0A_0' и $A_n'A_n$ соответствуют фазовые точки

$$F_0 = (0, 1/L) \ \text{ и } \ F_1 = (1 - 1/L, 1). \tag{4}$$

Уточнение. Вместе с каждой точкой $X = (x_1, x_2)$ множество Γ, очевидно, содержит точку $X' = (x_2, x_1)$, симметричную X относительно прямой $x_1 = x_2$ (если фазовая точка X соответствует отрезку AB, то X' соответствует отрезку BA). Исключим из Γ все точки, у которых $x_1 > x_2$, т. е. при определении Γ будем рассматривать только такие отрезки AB, у которых (при движении вдоль P) A ближе к A_0, чем B.

Нетрудно проверить, что множество Γ представляет собой граф, рёбра которого являются либо дугами эллипсов, либо прямолинейными отрезками (отрезки получаются, когда концы AB принадлежат или одному и тому же звену ломаной $A_0A_1 \ldots A_n$, или параллельным звеньям, а дуги — когда концы AB принадлежат непараллельным звеньям). Степени вершин Γ описаны при доказательстве следующей теоремы (леммы 1, 2).

Теорема 1. *Фазовые точки F_0 и F_1 принадлежат одной и той же связной компоненте графа Γ, так что отрезок длины 1 можно непрерывно переместить из положения A_0A_0' в положение $A_n'A_n$, двигая концы отрезка по ломаной P.*

Доказательство. Допустим (потом мы освободимся от этого допущения), что

ломаная P не содержит ни одной пары параллельных звеньев, расстояние между которыми в точности равно 1. (5)

Докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *При условии (5) все вершины графа Γ, кроме «концевых» вершин (4), имеют чётную степень: 0, 2 или 4, и лишь вершины F_0 и F_1 имеют степень 1.*

Вместе с леммой 1 будет доказана и теорема 1 при условии (5): выйдя из F_0, будем двигаться по рёбрам графа Г, не проходя ни по одному ребру дважды (пока это возможно); это движение не может закончиться ни в какой вершине чётной степени (войдя в неё, мы можем выйти); тем самым мы дойдем до F_1.

Доказательство леммы 1. Пусть отрезок AB длины 1 с вершинами на ломаной P не совпадает ни с A_0A_0', ни с $A_n'A_n$. Тогда

$$A \neq A_0, \quad B \neq A_n \tag{6}$$

(здесь используется ограничение, наложенное на ломаную $P = A_0A_1 \ldots A_n$ в начале параграфа: все точки ломаной P, лежащие на расстоянии $\leqslant 1$ от A_0, принадлежат её начальному звену, а все точки ломаной P, лежащие на расстоянии $\leqslant 1$ от A_n, принадлежат её конечному звену).

Вследствие (6) AB образует с P два угла в точке A (назовем их α_1, α_2) и два угла в точке B (назовем их β_1, β_2); при этом возможны следующие случаи:

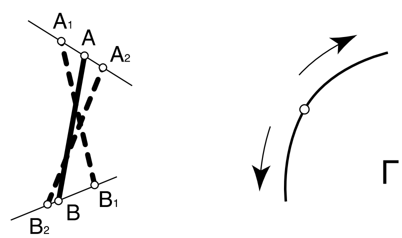


Рис. 7 a)

а) в точности один из углов α_1, α_2 — острый и в точности один из углов β_1, β_2 — острый; в этом (общем) случае оба конца AB могут одновременно двигаться по ломаной P в двух направлениях (рис. 7а);

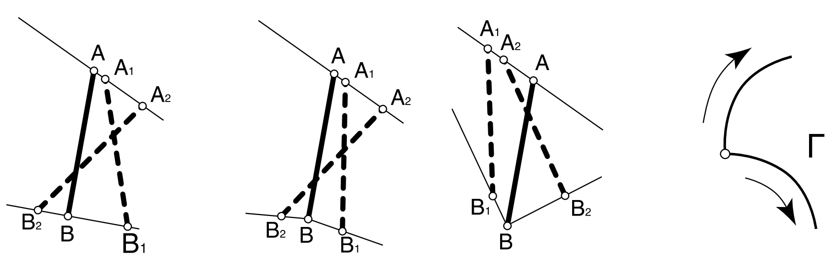


Рис. 7 b)

b) либо один, либо три из углов α_1, α_2, β_1, β_2 — острые; в этом случае один конец отрезка AB может двигаться по ломаной P в двух направлениях, а другой конец AB — в одном направлении (соответствуюшая вершина графа Γ имеет степень 2, рис. 7b);

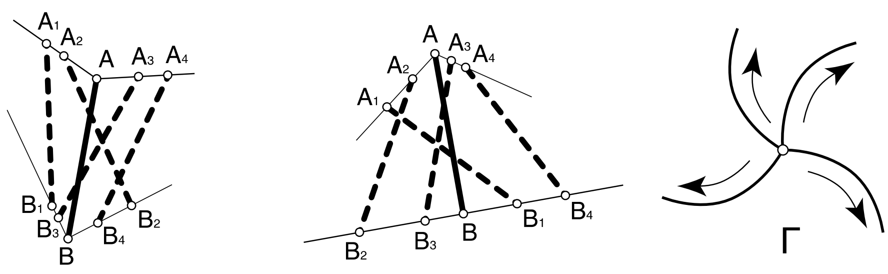
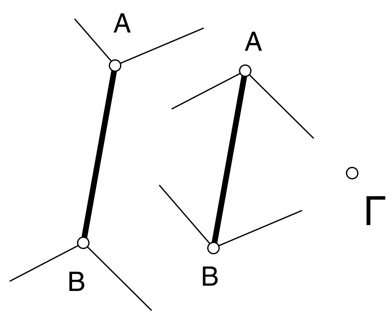


Рис. 7 c)

c) оба угла α_i — острые и ни один из углов β_i не является острым (или наоборот, оба угла β_i — острые и ни один из углов α_i не является острым); в этом случае каждый из конпов отрезка AB может двигаться по ломаной P в двух направлениях, так что всего имеется четыре варианта движения (соответствуюшая вершина графа Γ имеет степень 4, рис. 7c);



k \ j	0	1	2
0	0	2	4
1	2	2	2
2	4	2	0

Рис. 7 d)

d) все углы α_1, α_2, β_1 и β_2 — острые, либо ни один из этих углов не является острым; из этого положения отрезок AB никуда не может сдвинуться (граф Γ имеет изолированную вершину, рис. 7d).

Случаи a–d исчерпывают 9 возможностей (j, k), $0 \leqslant j, k \leqslant 2$, где j обозначает число острых углов среди углов α_i, а k — число острых углов среди углов β_i, $i = 1, 2$. Лемма 1 — а с ней и теорема 1 при условии (5) — доказана.

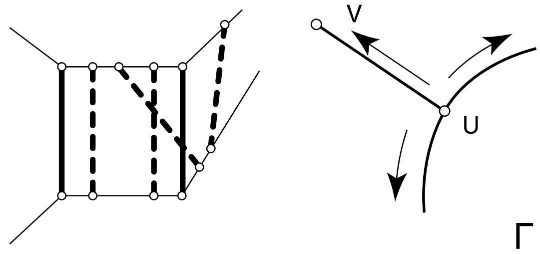


Рис. 7 е)

В общем случае — без условия (5) — граф Г, кроме «концевых» вершин F_i степени 1, может иметь и другие, «неконцевые», вершины нечётной степени.

Верна, однако, следующая лемма:

Лемма 2. *Все неконцевые вершины графа* Г *нечётной степени можно разбить на пары вершин (U, V), соединённых в* Г *прямолинейными отрезками — рёбрами UV.*

Докажем лемму 2, а потом выведем из неё теорему 1.

Доказательство леммы 2. Граф Г может иметь *неконцевые* вершины нечётной степени только при нарушении (5), т.е. при условии, что ломаная P содержит параллельные звенья, расстояние между которыми в точности равно 1 (рис. 7е).

Каждой такой паре звеньев соответствует прямолинейный отрезок (ребро UV графа Г), соединяющий две *неконцевые* вершины U и V нечётной степени, что и доказывает лемму 2.

Удалив из графа Г все прямолинейные рёбра UV, соединяющие неконцевые вершины нечётной степени, приходим к графу Γ', все неконцевые вершины которого имеют чётную степень: $0, 2$ или 4, т. е. оказываемся в условиях леммы 1, которая, как и прежде, влечет за собой теорему 1.

Попутно приведённые доказательства объясняют роль ручки H в задачах 1–3: это аналог начального и конечного звеньев ломаной $A_0A_1 \ldots A_n$; наличие ручки H даст возможность выделить среди всех вершин соответствующего графа Г в фазовом пространстве «концевые» вершины F_i спени 1 (подробнее об этом — в разд. 6), а также поможет использовать задачи 1–3 при решении задачи о гвоздях из аннотации.

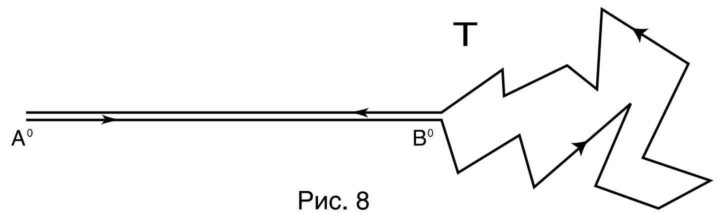


Рис. 8

6. Перемещение отрезка по многоугольнику с ручкой

Чтобы решить задачи 1–3, свяжем с P_H ориентированную ломаную T, состоящую из трёх частей (рис. 8): начальное звено ломаной T — кусок ручки H от точки A^0 до точки B^0, вторая часть T — ориентированный против часовой стрелки контур P многоугольника M с началом и концом в B^0 и, наконец, конечное звено T — кусок ручки H от B^0 до A^0. Точку A^0 выберем *достаточно далеко* от P — так, чтобы её расстояние до P было больше D, где D больше диаметра многоугольника M.

Задача 1, очевидно, имеет решение, если длина d отрезка A_0B_0 больше D.

Поэтому далее предполагается, что $d \in (0; D]$. Кроме того, отрезок A_0B_0 можно без ограничения общности считать примыкающим к A^0, так что далее либо $A_0 = A^0$, либо $B_0 = A^0$.

Построим в фазовом пространстве граф $\Gamma = \Gamma_d$ (d — параметр, $0 < d \leqslant D$); отнесем к Γ_d все фазовые точки (x_1, x_2), $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \leqslant 1$, которые получаются по следующему правилу. Пусть A и B — такие точки ломаной T, что $|AB| = d$, причем при движении из A^0 вдоль T точка A встречается раньше, чем B. Пусть L — длина ломаной T. Длины ломаных A^0A и A^0B (измеренные вдоль T) обозначим через L_1 и L_2 (так что $L_2 - L_1 \geqslant d$) и положим (как и в (3)) $x_i = L_i/L$, $i = 1, 2$. В частности, отрезкам длины d, примыкающим к A^0, соответствуют фазовые точки

$$F_1 = (0, d/L),\ F_2 = (0, 1 - d/L),\ F_3 = (d/L, 1) \text{ и } F_4 = (1 - d/L, 1). \quad (7)$$

Тем самым, в отличие от разд. 5, концевых фазовых точек не две, а четыре (рис. 9).

При $d = D$ и при $d \in (0; D)$, близких к 0, решение задачи 1, очевидно, существует, причем выполняются (соответственно) условия (1) и (2). Иными словами, в первом случае (рис. 9a) Γ_d включает компоненту, содержащую F_1 и F_2, и компоненту, содержащую F_3 и F_4, а во втором случае (рис. 9b) — компоненту, содержащую F_1 и F_4, и компоненту, содержащую F_2 и F_3 (последняя, впрочем, изображает движение отрезка

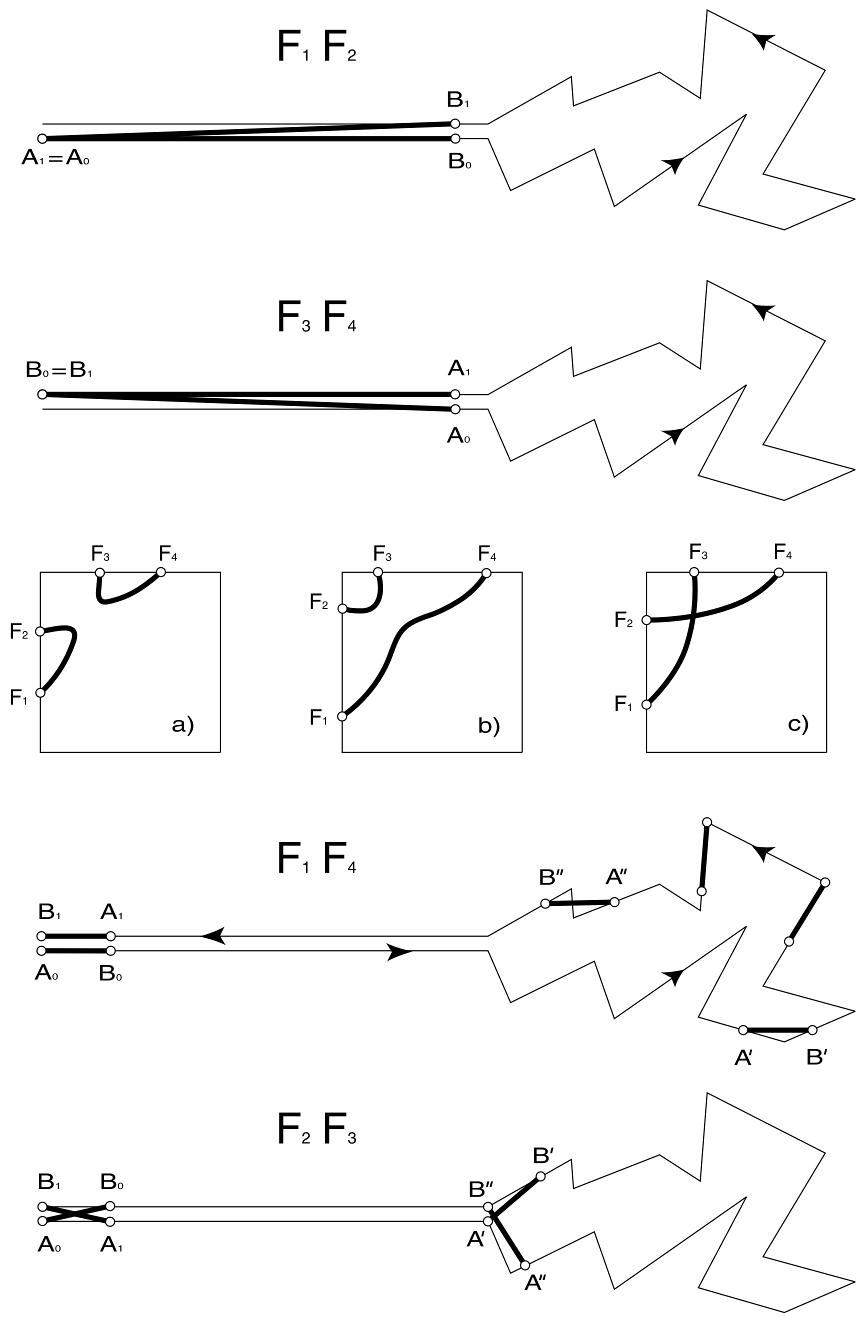

$F_1\ F_2$
B_1
$A_1 = A_0$
B_0
$F_3\ F_4$
$B_0 = B_1$
A_1
A_0
F_3
F_4
F_2
F_1
a)
b)
c)
$F_1\ F_4$
B''
A''
B_1
A_1
A_0
B_0
A'
B'
$F_2\ F_3$
B'
B''
B_1
B_0
A_0
A_1
A'
A''

Рис. 9

AB, при котором ни A, ни B не обходят P, так что отображения $[0;1]$ в P_H, соответствующие этой компоненте, не являются решением задачи 1).

Решим теперь задачу 1 для любого $d \in (0D]$.

Ясно, что все концевые вершины F_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$, графа Γ_d имеют степень 1. Что же касается неконцевых вершин Γ_d, то, почти дословно повторяя доказательство теоремы 1, получаем:

A. *Если ломаная T не содержит ни одной пары параллельных звеньев, расстояние между которыми равно d, то все неконцевые вершины Γ_d имеют четную степень.*

B. *Если ломаная T содержит параллельные звенья, расстояние между которыми равно d, то все неконцевые вершины Γ_d нечётной степени можно разбить на пары вершин (U,V), соединённых в Γ_d прямолинейными отрезками — рёбрами UV. Исключив эти рёбра из Γ_d, приходим к графу Γ'_d, все неконцевые вершины которого имеют чётную степень.*

Выйдя из вершины F_1, будем двигаться по рёбрам графа Γ_d (в случае **A**) или графа Γ'_d (в случае **B**), не проходя ни по одному ребру дважды (пока это возможно); это движение не может закончиться ни в какой вершине чётной степени; тем самым мы дойдем до одной из вершин F_i, $2 \leqslant i \leqslant 4$.

Если это — вершина F_2, то выйдем из F_3 и продолжим двигаться по тем рёбрам, по которым мы ещё ни разу не проходили (по–прежнему не проходя ни по одному ребру дважды, пока это возможно); как и раньше, это движение не может закончиться ни в какой вершине чётной степени; тем самым мы дойдем до единственной оставшейся концевой вершины F_4.

Итак, в рассматриваемом случае граф Γ_d включает компоненту $K_{1,2}$, содержащую точки F_1 и F_2, и компоненту $K_{3,4}$, содержащую F_3 и F_4.

Альтернативная возможность: выйдя из F_1, мы могли дойти до F_4, в этом случае Γ_d включает компоненту $K_{1,4}$, содержащую F_1 и F_4, а также компоненту $K_{2,3}$, содержащую F_2 и F_3.

Наконец, выйдя из F_1, мы могли дойти до F_3 (по пути $K_{1,3}$); но тогда существует и путь $K_{2,4}$ из F_2 в F_4, а поскольку путь $K_{1,3}$ разделяет F_2 и F_4, то пути $K_{1,3}$ и $K_{2,4}$ пересекаются; значит, в этом случае все четыре вершины: F_1, F_2, F_3 и F_4 — принадлежат одной компоненте графа Γ_d (рис. 9c).

Таким образом, из вершины F_1 всегда можно дойти либо до F_2, либо до F_4, а иногда и до каждой из трёх вершины: F_2, F_3 и F_4. Задача 1 решена.

Более того, всё подготовлено и для решения задач 2 и 3.

Определение. Используя обозначение $K_{i,j}$ для связного подграфа графа Γ_d, содержашего F_i и F_j, выделим два класса графов Γ_d:

любой граф первого класса включает непересекаюшиеся компоненты $K_{1,2}$ и $K_{3,4}$;

любой граф второго класса включает непересекаюшиеся компоненты $K_{1,4}$ и $K_{2,3}$.

В этих терминах задачи 2 и 3 можно переформулировать следующим образом:

2. *Существует такое w, что при $d > w$ граф Γ_d принадлежит первому классу, а при $d < w$ — второму классу.*

3. *При $d = w$ граф Γ_d не принадлежит ни первому, ни второму классу: все четыре вершины F_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$, принадлежат одной компоненте Γ_w.*

Решение задач 2 и 3. Ясно, что при $d \neq e$ графы Γ_d и Γ_e не пересекаются. При этом для концевых вершин Γ_e (обозначим их E_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$, чтобы отличить от вершин F_i графа Γ_d) выполняются соотношения, аналогичные (7):

$$E_1 = (0, e/L), \ E_2 = (0, 1 - e/L), \ E_3 = (e/L, 1) \text{ и } \ E_4 = (1 - e/L, 1),$$

т. е. (рис. 10) при $e < d$ точки E_i расположены ближе, чем F_i, к углам квадрата

$$K = \{(x_1, x_2) \,|\, 0 \leqslant x_i \leqslant 1, \, i = 1, 2\}.$$

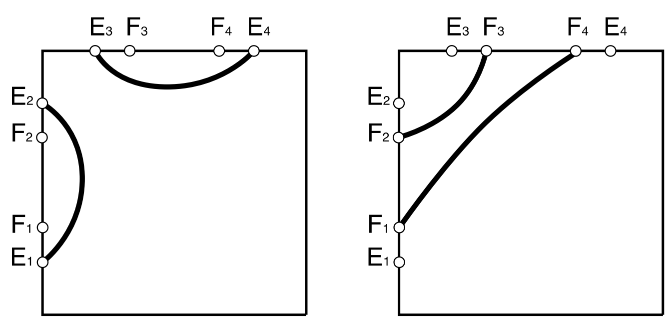


Рис. 10

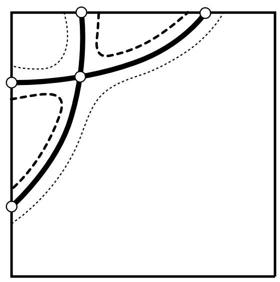


Рис. 11

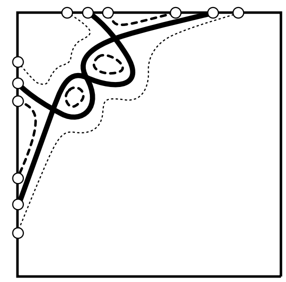


Рис. 12

Поэтому верна

Лемма 3. *Если граф Γ_e — первого класса и $d > e$, то граф Γ_d — тоже первого класса. Если Γ_d — второго класса и $e < d$, то Γ_e — тоже второго класса.*

Доказательство. Иначе Γ_d и Γ_e пересеклись бы, рис. 10.

Следствие. *Можно принять за w нижнюю грань тех d, для которых граф Γ_d принадлежит первому классу или (что то же самое) верхнюю грань тех d, для которых Γ_d — второго класса. Для этого w утверждения задач 2 и 3, очевидно, выполняются.*

Замечание. Точка $d = w$ является точкой перехода от графов второго класса к графам первого класса; компоненты $K_{i,j}$ для графов Γ_d при d, близких к w (рис. 11), напоминают семейство гипербол $xy = c$ для c вблизи 0. При $d = w$ граф $\Gamma_d = \Gamma_w$ имеет вершину X степени 4, из которой можно попасть по рёбрам Γ_w в любую из вершин F_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$; связный подграф Γ_w, содержащий X и F_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$, — аналог *сепаратрисы* $xy = 0$, разделяющей гирперболы $xy = c$ для c разных знаков (хотя иногда этот подграф устроен сложнее, например, так, как в случае, когда M — правильный треугольник, рис. 12).

В заключение этого параграфа сформулируем и докажем ещё одну лемму (сравним её с задачами 1, 2), которая понадобится в разд. 7.

Лемма 4. *Пусть существуют такие непрерывные отображения*

$$a:\ t \in [0;1] \to A = a(t) \in P_H, \quad b:\ t \in [0;1] \to B = b(t) \in P_H, \qquad (8)$$

что при $t = 0$ и $t = 1$ отрезок AB занимает одно и то же положение $A_0B_0 \subset H$: $A_0 = a(0) = a(1)$, $B_0 = b(0) = b(1)$, при изменении t от 0

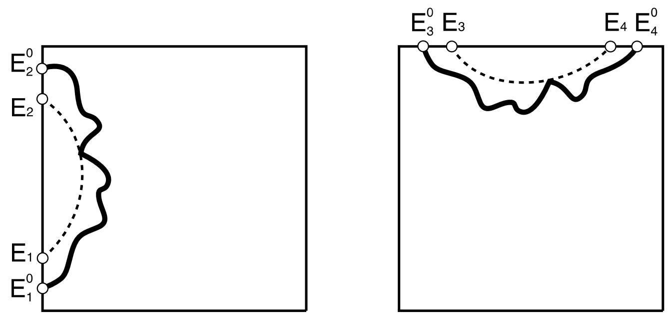


Рис. 13

до 1 *одна из точек* A, B *обходит контур* P *и расстояние между* A *и* B *не обязательно постоянно, но при всех* $t \in [0;1]$ *не превосходит* ϵ (*в частности,* $|A_0B_0| = \epsilon_0 \leqslant \epsilon$). *Тогда* $\epsilon \geqslant w$, *так что существуют отображения, обладающие всеми свойствами отображений* (8) *и, кроме того, такие, что* $|AB| \equiv \epsilon$.

Доказательство. В фазовом пространстве перемещение (8) отрезка AB изображается кривой $Q = Q_{1,2}$, соединяющей E_1^0 и E_2^0, или кривой $Q = Q_{3,4}$, соединяющей E_3^0 и E_4^0, где E_i^0 — вершины графа Γ_{ϵ_0} (рис. 13). При $d > \epsilon$ эта кривая не пересекается с Γ_d (так как $|AB| \leqslant \epsilon < d$). Поэтому $\epsilon \geqslant w$: если предположить, что $\epsilon < w$, то при $d \in (\epsilon; w)$ граф Γ_d — второго класса и, значит, вопреки сказанному, пересекается с кривой Q (либо $K_{1,4}$ пересекает $Q_{1,2}$, либо $K_{2,3}$ пересекает $Q_{3,4}$).

7. Можно ли протащить многоугольник между двумя гвоздями?

Опираясь на лемму 4, решим задачу о гвоздях из аннотации и задачу 4 из разд. 3.

Пусть гвозди G_1 и G_2 вбиты в стол на расстоянии ϵ, и пусть известно, что многоугольник M ширины w_M можно протащить между ними (так что $\epsilon \geqslant w_M$).

Когда мы протаскиваем многоугольник между гвоздями, то гвозди неподвижны, а многоугольник M движется. Однако, если жестко связать с M систему координат, то в ней, наоборот, *гвозди* G_1 *и* G_2 *движутся относительно неподвижного многоугольника*:

$$G_1 = G_1(t) \text{ и } G_2 = G_2(t),\ t \in [0;1]. \tag{9}$$

Для многоугольников не очень сложной формы движение (9) можно представлять себе следующим образом (рис. 14).

На контуре P многоугольника M выбираются две точки: C_1^* и C_2^*. В них к M приделываются две ручки: h_1 и h_2 (полупрямые $C_1^*C_1$ и $C_2^*C_2$), не пересекающие друг друга и не имеющие с P других общих точек, кроме C_1^* и C_2^*. Объединение M, h_1 и h_2 разбивает $\mathbb{R}^2$ на две части: *верхнюю* и *нижнюю*, и движение (9) происходит так, что $G_1(t)$ лежит в замыкании верхней, а $G_2(t)$ — в замыкании нижней части.

Именно так *протаскивание многоугольника между гвоздями G_1 и G_2* трактуется в [1], и исследуемая задача решена в [1] для многоугольников M, которые можно *именно таким способом* протащить между G_1 и G_2.

Но для более сложных многоугольников (рис. 15) при ϵ, близких к w_M движение (9) *нельзя* представить таким образом, и на помощь приходит конструкция P_H из разд. 3.

Чтобы применить её, прежде всего отметим, что если движение (9) происходит так, как в задаче 1, т.е. $G_1(t) = a(t)$, $G_2(t) = b(t)$, то *при выполнении условия* (1) *оказывается, что многоугольник M протащили между гвоздями G_1 и G_2*.

Значит, *ширина $w = w(P_H)$ многоугольника с ручкой P_H не меньше ширины w_M многоугольника M*. Противоположное неравенство, а с ним и тождество

$$w \equiv w_M, \tag{10}$$

сразу вытекают из следующего утверждения (которое будет доказано ниже):

Если многоугольник M можно как-нибудь протащить между гвоздями G_1, G_2, то это можно сделать и так, чтобы движение (9) *происходило, как в задаче* 1 *при условии* (1) *и, тем самым, чтобы концы отрезка G_1G_2 двигались по P_H*.

Кроме леммы 4, при проверке этого утверждения будет использована ещё одна лемма (лемма 5 *о главном интервале*), к формулировке и доказательству которой мы и приступаем.

Среди всех $t \in [0;1]$ в (9) имеются такие t, что пересечение отрезка G_1G_2 с M пусто, такие t, что G_1G_2 не содержит внутренних точек M, но $G_1G_2 \cap P \neq 0$, и, наконец, на $[0;1]$ можно выделить открытое подмножество Ω таких t, для которых отрезок G_1G_2 содержит *внутренние* точки M.

Лемма 5. *Среди интервалов, составляющих Ω, есть такой,* ***главный****, интервал $(t_0;t_1)$, что при $t \in [t_0;t_1]$ и происходит протаскивание*

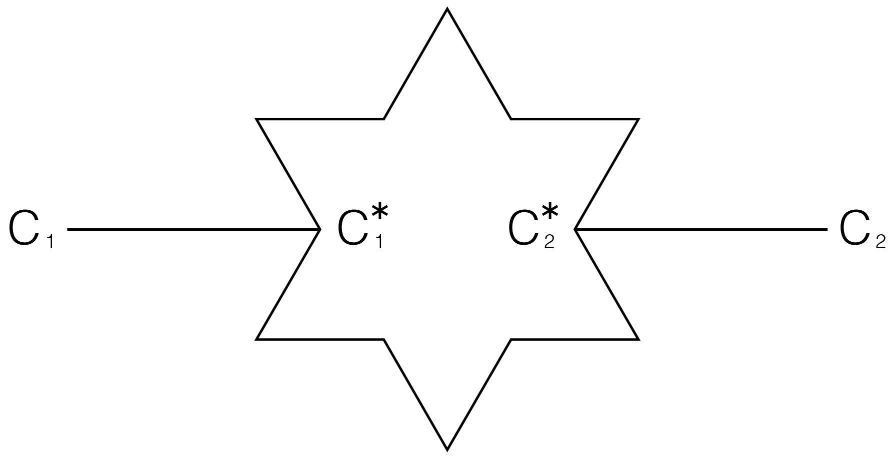


Рис. 14

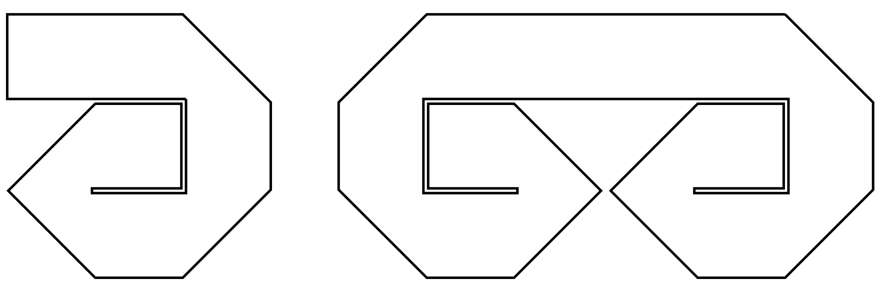


Рис. 15

многоугольника M между G_1 и G_2: для каждой внутренней точки $p \in M$ найдётся $t = t(p) \in (t_0; t_1)$, при котором отрезок G_1G_2 содержит p; при $t \in (t_0; t_1)$ все внутренние точки многоугольника M переходят через отрезок G_1G_2.

Доказательство. Вообще говоря, Ω содержит и другие, *неглавные*, интервалы I. Для t, принадлежащих каждому из них, отрезки G_1G_2 содержат не все, а только часть внутренних точек M; при $t \in I$ эти точки *лишь временно переходят через отрезок G_1G_2, а потом возвращаются обратно*. Поэтому, если бы Ω составляли только такие интервалы I, многоугольник M не был бы протащен между G_1 и G_2. Значит, Ω действительно содержит искомый интервал $(t_0; t_1)$.

Для главного интервала $(t_0; t_1) \subseteq \Omega$ при $t \in [t_0; t_1]$ точки $P \in G_1G_2$, ближайшие к G_1, G_2, обозначим (соответственно) через A и B, $A = A(t)$, $B = B(t)$. Отображения

$$t \in [t_0; t_1] \to A = A(t), \quad t \in [t_0; t_1] \to B = B(t), \tag{11}$$

могут оказаться разрывными (для невыпуклых многоугольников M), но, меняя параметризацию (заменяя «перескоки» $A(t-0)$ в $A(t+0)$ и $B(t-0)$ в $B(t+0)$ «непрерывными переходами»), нетрудно сделать их непрерывными. При каждом из двух граничных значений $t = t_0$ и $t = t_1$ отрезок $AB = A(t)B(t)$ (возможно, вырождающийся в точку — в случае, если $A(t) = B(t)$), очевидно, лежит на границе M, так что существует такая сторона многоугольника s_i, что $A(t_i)B(t_i) \subseteq s_i$, $i = 0, 1$. Поэтому легко доопределить (11) вне $[t_0; t_1]$ и перейти от (11) к непрерывным отображениям (8), удовлетворяющим условиям леммы 4.

Применяя эту лемму, получаем, что существуют отображения $A(t)$ и $B(t)$, обладающие всеми свойствами отображений (8) и, кроме того, такие, что $|AB| \equiv \epsilon$.

Полагая $G_1 = A(t)$, $G_2 = B(t)$, получаем, что верна анонсированная выше

Теорема 2. *Если многоугольник M можно как-нибудь протащить между точками G_1, G_2 на расстоянии ϵ, то это можно сделать и так, чтобы движение* (9) *происходило, как в задаче* 1 *при условии* (1)*; концы отрезка G_1G_2 движутся при этом по P_H.*

Так как (по лемме 4) $\epsilon \geqslant w$, то при любом $d > \epsilon$ соответствующий граф Γ_d принадлежит первому классу и, следовательно, содержит компоненты $K_{1,2}$ и $K_{3,4}$. Отсюда для любого многоугольника M следует

Теорема 3. *Если многоугольник M можно протащить между двумя точками на расстоянии ϵ, то его можно протащить и между точками на расстоянии $d > \epsilon$.*

Итак, задача из аннотации решена. Решена и задача 4: как уже отмечено, из теоремы 2 вытекает тождество (10), а поскольку в приведённых выше рассуждениях ручку H можно всюду заменить ручкой H^*, то $w = w^*$ — ширина w многоугольника с ручкой P_H не зависит от расположения ручки H.

8. Доказательство теоремы двойственности

Остается доказать теорему двойственности. Подробно она сформулирована в разд. 1, а её краткая формулировка — следуюшая:

Теорема 4. $w_M = d_M$.

Доказательство. Вследствие (10) ширина w_M равна d_{max} — максимальному значению длины d отрезка AB, который можно так переместить вдоль ломаной T из положения A_0B_0 в положение $A_1B_1 = B_0A_0$, чтобы выполнялось условие (2); фазовая точка движется при этом по графу Γ_w из F_1 в F_4 (рис. 9).

Граф Γ_w содержит также путь из F_2 в F_3.

Сопоставление перемещений отрезка AB вдоль T, изображаемых путями F_1F_4 и F_2F_3 (нижний фрагмент рисунка 9) делает очевидным равенство $d_{max} = d_M$.

Итак, $w_M = d_M$. Теорема двойственности доказана.

В заключение хочу высказать признательность друзьям и коллегам за помощь при подготовке этой статьи: А. М. Олевский обратил мое внимание на работу [1]; у меня не было этой работы под рукой, и И. В. Арнольд по моей просьбе сканировал и прислал мне её по e-mail; Н. Б. Васильев проявил завидное долготерпение, выслушивая по телефону мои доказательства и обсуждая их со мной; Д. Е. Долгов сделал на компьютере рисунки к статье. Всех их я искренне благодарю.

Список литературы

[1] *Goodman J.E., Pach J. and Yap C.K.* Mountain Climbing, Ladder Moving and the Ring-Width of a Poligon. // Amer. Math. Monthly, Vol.96. 1989. P. 494–510.

[2] *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971.