Об одной замечательной нумерации положительных рациональных чисел

Д. Н. Андреев

Введение

Счётность множества рациональных чисел – это один из самых первых фактов, с которыми знакомят начинающих изучать элементарные основы теории множеств. При этом, однако, все известные автору доказательства этого факта довольствуются лишь демонстрацией *принципиальной возможности* нумерации множества рациональных чисел, так или иначе сводя дело к вопросу о нумерации *пар целых чисел* (с надлежащим ограничением на их знаки). В то же время, рациональные числа естественным образом отождествляются лишь с парами *взаимно простых* целых чисел (также с нужным ограничением на знаки), и это обстоятельство при любом «стандартном» способе нумерации делает задачу реального нахождения номера заданного рационального числа — или, наоборот, рационального числа по заданному его номеру — практически безнадёжной.

В настоящей работе строится и изучается один способ нумерации положительных рациональных чисел, обладающий целым рядом замечательных свойств. Прежде всего, в этой нумерации упомянутые выше задачи решаются эффективно: нахождение номера рационального числа p/q требует лишь $O(\log \max(p,q))$ арифметических операций, а нахождение рационального числа по его номеру n выполняется за $O(\log n)$ арифметических операций. Далее, арифметическая функция, осуществляющая нумерацию, оказывается поразительно «гладкой» в сумматорном смысле: она не только обладает средним значением, но и имеет всего лишь логарифмический остаточный член сумматорной формулы! Наконец, эта нумерация естественным образом приводит к простой и красивой формулировке *принципа математической индукции* для положительных рациональных чисел.

1. Предварительные замечания

Мы позволим себе использовать без специальных ссылок простейшие свойства разложений рациональных чисел в (конечные) цепные дроби, которые можно найти практически в любом стандартном курсе элементарной теории чисел.

Через $\mathbb{N}$ мы обозначаем множество натуральных чисел, через $\mathbb{Q}^+$ – множество положительных рациональных чисел. Символом ★ отмечается конец доказательства.

Как известно, любое отличное от нуля рациональное число может быть разложено в обыкновенную конечную цепную дробь

$$[q_0; q_1, \ldots, q_l] \stackrel{\text{def}}{=} q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_l}}} \tag{1}$$

ровно двумя различными способами, один из которых получается из другого заменой $q_l > 1$ (или $q_0 = 1$ при $l = 0$) на $(q_l - 1) + \frac{1}{1}$. Нетрудно понять, что при такой замене сумма $q_0 + \cdots + q_l$ не изменяется; поэтому корректным будет следующее

Определение. *Высотой* $\boldsymbol{h}(r)$ положительного рационального числа r мы будем называть сумму $q_0 + \cdots + q_l$ всех элементов его разложения в обыкновенную цепную дробь вида (1).

Непосредственно очевидны следующие свойства введённого понятия (доказательства предоставляются читателю):

Свойство 1. $\boldsymbol{h}(r)$ принимает только натуральные значения, причём все натуральные числа служат её значениями.

Свойство 2. $\boldsymbol{h}(r) = 1$ тогда и только тогда, когда $r = 1$.

Свойство 3. Для любого $r \in \mathbb{Q}^+$ имеем: $\boldsymbol{h}\left(\frac{1}{r}\right) = \boldsymbol{h}(r)$, $\boldsymbol{h}(r+1) = \boldsymbol{h}(r) + 1$.

2. Основная конструкция

Определим арифметическую функцию $\boldsymbol{r}(n)$ следующим образом: положим $\boldsymbol{r}(1) = 1$, и для любого $n \in \mathbb{N}$ пусть $\boldsymbol{r}(2n) = \boldsymbol{r}(n) + 1$, $\boldsymbol{r}(2n+1) = \dfrac{1}{\boldsymbol{r}(n) + 1}$. Очевидно, эти условия для всех $n \in \mathbb{N}$ однозначно определяют значение $\boldsymbol{r}(n)$, являющееся положительным рациональным числом.

Теорема 1. Функция $\boldsymbol{r}(n)$ принимает каждое положительное рациональное значение один и только один раз.

Доказательство. 1) Докажем сперва, что для любого $r \in \mathbb{Q}^+$ найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $\boldsymbol{r}(n) = r$. Доказательство проведём индукцией по величине $\boldsymbol{h}(r)$. База индукции очевидна, поскольку при $\boldsymbol{h}(r) = 1$ имеем $r = 1$, и можно взять $n = 1$, так как $\boldsymbol{r}(1) = 1$. Пусть $h > 1$; предположим, что для $\boldsymbol{h}(r) < h$ требуемое уже доказано, и возьмём произвольное r, для которого $\boldsymbol{h}(r) = h$; заметим, что $r \neq 1$, так как $h > 1$. Если $r > 1$, то $h = \boldsymbol{h}(r) = \boldsymbol{h}(r-1) + 1$, откуда $\boldsymbol{h}(r-1) = h - 1$; по индуктивному предположению, найдётся такое $n' \in \mathbb{N}$, что $\boldsymbol{r}(n') = r - 1$, и, взяв $n = 2n'$, получим $\boldsymbol{r}(n) = \boldsymbol{r}(2n') = \boldsymbol{r}(n') + 1 = r$. Если же $r < 1$, то $\frac{1}{r} > 1$; тогда $h = \boldsymbol{h}(r) = \boldsymbol{h}\left(\frac{1}{r}\right) = \boldsymbol{h}\left(\frac{1}{r} - 1\right) + 1$, откуда $\boldsymbol{h}\left(\frac{1}{r} - 1\right) = h - 1$; по индуктивному предположению, найдётся такое $n' \in \mathbb{N}$, что $\boldsymbol{r}(n') = \frac{1}{r} - 1$, и, взяв $n = 2n' + 1$, получим $\boldsymbol{r}(n) = \boldsymbol{r}(2n' + 1) = \dfrac{1}{\boldsymbol{r}(n') + 1} = r$.

2) Докажем теперь, что для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем $\boldsymbol{r}(n) \neq \boldsymbol{r}(m)$ при $n \in \mathbb{N}$, $n \neq m$; доказательство проведём индукцией по m. База индукции здесь также очевидна: если $n \neq 1$, то либо $n = 2n'$ с некоторым $n' \in \mathbb{N}$, и тогда $\boldsymbol{r}(n) = \boldsymbol{r}(2n') = \boldsymbol{r}(n') + 1 > 1$, либо $n = 2n' + 1$ с некоторым $n' \in \mathbb{N}$, и тогда $\boldsymbol{r}(n) = \boldsymbol{r}(2n' + 1) = \dfrac{1}{\boldsymbol{r}(n') + 1} < 1$. Пусть $m > 1$, и пусть для всех $m' < m$ уже доказано, что $\boldsymbol{r}(n) \neq \boldsymbol{r}(m')$ при $n \in \mathbb{N}$, $n \neq m'$. Возьмём произвольное $n \in \mathbb{N}$, $n \neq m$. Если m чётно, то $m = 2m'$, где $m' \in \mathbb{N}$ и $m' < m$; теперь при нечётном n имеем $\boldsymbol{r}(n) \leqslant 1 < \boldsymbol{r}(m)$, а при чётном n положим $n = 2n'$, где $n' \in \mathbb{N}$, и, очевидно, $n' \neq m'$, откуда $\boldsymbol{r}(n) - \boldsymbol{r}(m) = \boldsymbol{r}(2n') - \boldsymbol{r}(2m') = \boldsymbol{r}(n') - \boldsymbol{r}(m') \neq 0$ по предположению индукции. Если же m нечётно, то $m = 2m' + 1$, где $m' \in \mathbb{N}$ и $m' < m$; теперь при чётном n имеем $\boldsymbol{r}(n) > 1 > \boldsymbol{r}(m)$, а при нечётном n положим $n = 2n' + 1$, где $n' \in \mathbb{N}$, и, очевидно, $n' \neq m'$, откуда

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(n) - \boldsymbol{r}(m) &= \\ &= \boldsymbol{r}(2n'+1) - \boldsymbol{r}(2m'+1) = \frac{1}{\boldsymbol{r}(n') + 1} - \frac{1}{\boldsymbol{r}(m') + 1} = \\ &= \frac{\boldsymbol{r}(m') - \boldsymbol{r}(n')}{(\boldsymbol{r}(m') + 1)(\boldsymbol{r}(n') + 1)} \neq 0\end{aligned}$$

по предположению индукции. ★

Таким образом, мы видим, что построенная нами функция $\boldsymbol{r}(n)$ действительно осуществляет нумерацию всех положительных рациональных чисел, и, следовательно, на $\mathbb{Q}^+$ определена обратная ей функция со значениями в $\mathbb{N}$, которую мы будем обозначать через $\boldsymbol{n}(r)$.

3. Вычисление нумерации

Теперь займёмся вопросом о том, как связаны между собой соответствующие друг другу значения функций $n = \boldsymbol{n}(r)$ и $r = \boldsymbol{r}(n)$. Оказывается, эта связь выражается тем, что *двоичное разложение* числа n и *разложение в цепную дробь* числа r практически могут быть, что называется, «прочитаны» одно по другому.

Теорема 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Q}^+$ таковы, что $r = \boldsymbol{r}(n)$ и $n = \boldsymbol{n}(r)$. Стандартное представление n в двоичной системе счисления: $n = 2^{m_0} + +2^{m_1} + \dots + 2^{m_l}$, где $0 \leqslant m_0 < \dots < m_l$, и «длинное» разложение r в обыкновенную цепную дробь: $r = [q_0; q_1, \dots, q_{l'-1}, q_{l'}]$, где $q_{l'} = 1$, связаны так, что $l' = l + 1$, и для всех k, $1 \leqslant k \leqslant l$, имеет место равенство $m_k = q_0 + \dots + q_k$.

Доказательство. Перефразируя известное изречение Дж. И. Литлвуда о тождествах, можно сказать, что доказательство этой теоремы тривиально, – *после того, как она сформулирована;* действительно, доказательство, которое мы проведём индукцией по n, сводится к достаточно рутинной проверке.

База индукции усматривается непосредственно: для $n = 1 = 2^0$ имеем $r = 1 = [0; 1]$, так что $l = 0$, $m_0 = 0$; $l' = 1$, $q_0 = 0$, и справедливость утверждения теоремы очевидна. Пусть $n > 1$; предположим, что для всех $n' \in \mathbb{N}$, $n' < n$ утверждение уже доказано. Если n чётно, то $n = 2n'$, где $n' \in \mathbb{N}$, $n' < n$; очевидно, $m_0 > 0$ и $n' = 2^{m_0-1} + \dots + 2^{m_l-1}$; поскольку, по предположению индукции, для $r' = \boldsymbol{r}(n')$ имеем $r' = [m_0 - 1; m_1 - m_0, \dots \dots, m_l - m_{l-1}, 1]$, то $r = r' + 1 = [m_0; m_1 - m_0, \dots, m_l - m_{l-1}, 1]$, что и утверждается. Если же n нечётно, то $n = 2n' + 1$, где $n' \in \mathbb{N}$, $n' < n$; очевидно, $m_0 = 0$ и $n' = 2^{m_1-1} + \dots + 2^{m_l-1}$; поскольку, по предположению индукции, для $r' = \boldsymbol{r}(n')$ имеем $r' = [m_1 - 1; m_2 - m_1, \dots, m_l - m_{l-1}, 1]$, то $r = \dfrac{1}{r' + 1} = [0; m_1 - 0, \dots, , m_l - m_{l-1}, 1]$, что и утверждается. ★

Следствие. Для нахождения $\boldsymbol{n}(r)$ по r и $\boldsymbol{r}(n)$ по n достаточен объём вычислений, имеющий логарифмический относительно данного порядок.

Действительно, разложение числа $r = p/q$ в обыкновенную цепную дробь сводится к алгоритму Евклида, который, как известно, выполняется за $O(\log \max(p, q))$ шагов с ограниченным числом арифметических операций на каждом шаге, а нам для нахождения n понадобится добавить в каждый шаг также лишь ограниченное число операций. Что же касается разложения числа n в стандартное двоичное представление, то оно, очевидно, осуществляется за $O(\log n)$ шагов с ограниченным числом арифметических операций, а нам для вычисления r, которое сводится к сворачиванию цепной дроби в обыкновенную, понадобится добавить в каждый шаг также лишь ограниченное число операций.

4. Среднее значение

Здесь мы покажем, что функция $\boldsymbol{r}(n)$ обладает средним значением, и получим неулучшаемую оценку остаточного члена её сумматорной формулы. Доказательство основывается на ряде тождеств, которым удовлетворяют функция $\boldsymbol{r}(n)$ и другие, с ней связанные; мы сформулируем их в виде отдельных лемм.

Лемма 1. Для любого $k \in \mathbb{N}$ имеет место тождество:

$$\boldsymbol{r}(4k+1) + \boldsymbol{r}(4k+3) = 1.$$

Доказательство. Очевидно, имеем: $\boldsymbol{r}(4k+1)+\boldsymbol{r}(4k+3) = \dfrac{1}{\boldsymbol{r}(2k)+1} + \dfrac{1}{\boldsymbol{r}(2k+1)+1} = \dfrac{1}{\boldsymbol{r}(k)+2} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{\boldsymbol{r}(k)+1}+1} = \dfrac{1}{\boldsymbol{r}(k)+2} + \dfrac{\boldsymbol{r}(k)+1}{\boldsymbol{r}(k)+2} = 1.$ ★

Лемма 2. Для любого $k \in \mathbb{N}$ имеет место тождество:

$$\boldsymbol{r}(4k) + \boldsymbol{r}(4k+1) + \boldsymbol{r}(4k+2) + \boldsymbol{r}(4k+3) = \boldsymbol{r}(2k) + \boldsymbol{r}(2k+1) + 3. \tag{2}$$

Доказательство. Из леммы 1 следует, что
$\boldsymbol{r}(4k) + \boldsymbol{r}(4k+1) + \boldsymbol{r}(4k+2) + \boldsymbol{r}(4k+3) = \boldsymbol{r}(2k) + 1 + \boldsymbol{r}(2k+1) + 1 + 1 = \boldsymbol{r}(2k) + \boldsymbol{r}(2k+1) + 3.$ ★

Отсюда видно, что только число $3/2$ может претендовать на роль среднего значения функции $\boldsymbol{r}(n)$. Обозначая через $\boldsymbol{R}(n)$ сумматорную функцию для $\boldsymbol{r}(n)$, т. е. $\boldsymbol{R}(n) = \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n}^{k} \boldsymbol{r}(k)$, мы должны были бы рассмотреть теперь разность $\boldsymbol{R}(n) - \frac{3}{2}n$; однако, поскольку мы собираемся вывести *точные* границы изменения остаточного члена, нам будет удобно взять его в несколько модифицированном виде, положив $\boldsymbol{R}(n) = \dfrac{3n - 1 + \boldsymbol{\rho}(n)}{2}$, так что остаточным членом в собственном смысле этого слова будет не $\boldsymbol{\rho}(n)$, а $\dfrac{\boldsymbol{\rho}(n) - 1}{2}$.

Лемма 3. Для любого $m \in \mathbb{N}$ имеют место тождества:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}(4m) &= \boldsymbol{R}(2m) + 3m + \frac{1}{2}\,;\\
\boldsymbol{R}(4m+1) &= \boldsymbol{R}(2m+1) + 3m + \frac{1}{2} - \frac{1}{(\boldsymbol{r}(m)+1)(\boldsymbol{r}(m)+2)}\,;\\
\boldsymbol{R}(4m+2) &= \boldsymbol{R}(2m+1) + 3m + \frac{3}{2} + \frac{1}{\boldsymbol{r}(m)+2}\,,\\
\boldsymbol{R}(4m+3) &= \boldsymbol{R}(2m+1) + 3m + \frac{5}{2}\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

Доказательство. Применяя формулу (2), для произвольного $m \geqslant 1$ имеем:

$$\boldsymbol{R}(4m+3) = \boldsymbol{R}(3) + \sum_{1\leqslant k\leqslant m}^{k} (\boldsymbol{r}(4k) + \boldsymbol{r}(4k+1) + \boldsymbol{r}(4k+2) + \boldsymbol{r}(4k+3)) =$$

$$= \frac{7}{2} + \sum_{1\leqslant k\leqslant m}^{k} (\boldsymbol{r}(2k) + \boldsymbol{r}(2k+1) + 3) = 3m + \frac{7}{2} + \sum_{1\leqslant k\leqslant m}^{k} (\boldsymbol{r}(2k) + \boldsymbol{r}(2k+1)) =$$

$$= 3m + \frac{5}{2} + \boldsymbol{r}(1) + \sum_{1\leqslant k\leqslant m}^{k} (\boldsymbol{r}(2k) + \boldsymbol{r}(2k+1)) = 3m + \frac{5}{2} + \sum_{1\leqslant k\leqslant 2m+1}^{k} \boldsymbol{r}(k) =$$

$$= \boldsymbol{R}(2m+1) + 3m + \frac{5}{2}\,.$$

Непосредственно проверяется, что полученная формула *верна также и при* $m = 0$; поэтому, заменяя в ней m на $m-1$, для любого $m \geqslant 1$ получим: $\boldsymbol{R}(4m-1) = \boldsymbol{R}(2m-1) + 3(m-1) + \frac{5}{2} = \boldsymbol{R}(2m-1) + 3m - \frac{1}{2}$. Отсюда последовательно получим:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}(4m) &= \boldsymbol{R}(4m-1) + \boldsymbol{r}(m) = \boldsymbol{R}(2m-1) + 3m - \frac{1}{2} + \boldsymbol{r}(2m) + 1 =\\
&= \boldsymbol{R}(2m) + 3m + \frac{1}{2}\,;\\
\boldsymbol{R}(4m+1) &= \boldsymbol{R}(4m) + \boldsymbol{r}(4m+1) = \boldsymbol{R}(2m) + 3m + \frac{1}{2} + \frac{1}{\boldsymbol{r}(2m)+1} =\\
&= \boldsymbol{R}(2m) + 3m + \frac{1}{2} + \frac{1}{\boldsymbol{r}(m)+2}\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}(4m+2) &= \boldsymbol{R}(4m+1)+\boldsymbol{r}(4m+2) = \\ &= \boldsymbol{R}(2m)+3m+\frac{1}{2}+\frac{1}{\boldsymbol{r}(m)+2}+\boldsymbol{r}(2m+1)+1 = \\ &= \boldsymbol{R}(2m+1)+3m+\frac{3}{2}+\frac{1}{\boldsymbol{r}(m)+2}\,.\end{aligned}$$

Теперь осталось выразить $\boldsymbol{R}(4m+1)$ не через $\boldsymbol{R}(2m)$, а через $\boldsymbol{R}(2m+1)$; имеем:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}(4m+1) &= \boldsymbol{R}(2m+1)-\boldsymbol{r}(2m+1)+3m+\frac{1}{2}+\frac{1}{\boldsymbol{r}(m)+2} = \\ &= \boldsymbol{R}(2m+1)-\frac{1}{\boldsymbol{r}(m)+1}+3m+\frac{1}{2}+\frac{1}{\boldsymbol{r}(m)+2} = \\ &= \boldsymbol{R}(2m+1)+3m+\frac{1}{2}-\frac{1}{(\boldsymbol{r}(m)+1)(\boldsymbol{r}(m)+2)}\,.\end{aligned}$$

★

Лемма 4. Для любого $m \in \mathbb{N}$ имеют место тождества:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}(4m) &= \boldsymbol{\rho}(2m)+1\,, \\ \boldsymbol{\rho}(4m+1) &= \boldsymbol{\rho}(2m+1)+\frac{\boldsymbol{r}(m)(\boldsymbol{r}(m)+3)}{(\boldsymbol{r}(m)+1)(\boldsymbol{r}(m)+2)}\,, \\ \boldsymbol{\rho}(4m+2) &= \boldsymbol{\rho}(2m+1)+\frac{2}{\boldsymbol{r}(m)+2}\,, \\ \boldsymbol{\rho}(4m+3) &= \boldsymbol{\rho}(2m+1)-1\,.\end{aligned} \tag{4}$$

Доказательство. Получается непосредственной подстановкой в формулы (3) всюду $\dfrac{3n-1+\boldsymbol{\rho}(n)}{2}$ вместо $\boldsymbol{R}(n)$ и выполнением очевидных преобразований. ★

Теорема 3. Для любого целого $l \geqslant 0$ при всех n из промежутка $2^l \leqslant n < 2^{l+1}$ справедливо неравенство $|\boldsymbol{\rho}(n)| \leqslant l$, причём равенство $\boldsymbol{\rho}(n) = l$ достигается только при $n = 2^l$, а равенство $\boldsymbol{\rho}(n) = -l$ – только при $n = 2^{l+1}-1$.

Доказательство. Доказывать теорему мы будем индукцией по l. Для $l = 0$ и $l = 1$ утверждение теоремы проверяется непосредственно: так как $\boldsymbol{r}(1) = 1$, $\boldsymbol{r}(2) = 2$, $\boldsymbol{r}(3) = 1/2$, то $\boldsymbol{R}(1) = 1$, $\boldsymbol{R}(2) = 3$, $\boldsymbol{R}(3) = 7/2$, и, значит, $\boldsymbol{\rho}(1) = 0$, $\boldsymbol{\rho}(2) = 1$, $\boldsymbol{\rho}(3) = -1$, так что в этих случаях теорема верна.

Пусть теперь $l > 1$, и пусть уже доказано, что $|\boldsymbol{\rho}(n)| \leqslant l-1$ при $2^{l-1} \leqslant n < 2^l$, причём $\boldsymbol{\rho}(n) = l-1$ только при $n = 2^{l-1}$, а $\boldsymbol{\rho}(n) = -(l-1)$ только при $n = 2^l - 1$. Тогда, по формулам (4), имеем $\boldsymbol{\rho}(2^l) = \boldsymbol{\rho}(2^{l-1}) + 1 = l$ и $\boldsymbol{\rho}(2^{l+1}-1) = \boldsymbol{\rho}(2^l - 1) - 1 = -l$, так что в этой части утверждение теоремы верно. Если же $2^l < n < 2^{l+1} - 1$, то, в зависимости от вычета $n \bmod 4$, имеем следующие возможности:

0) при $n = 4m$, ввиду $n > 2^l$, будет $2^l + 4 \leqslant n \leqslant 2^{l+1} - 4$, откуда $2^{l-1} < 2m < 2^l - 1$, и, значит, $-(l-1) < \boldsymbol{\rho}(2m) < l-1$, а так как по формулам (4) имеем $\boldsymbol{\rho}(n) = \boldsymbol{\rho}(2m) + 1$, то отсюда $-(l-2) < \boldsymbol{\rho}(n) < l$, так что $|\boldsymbol{\rho}(n)| < l$;

1) при $n = 4m+1$ будет $2^l + 1 \leqslant n \leqslant 2^{l+1} - 3$, откуда $2^{l-1} < 2m+1 \leqslant$ $\leqslant 2^l - 1$, и, значит, $-(l-1) \leqslant \boldsymbol{\rho}(2m+1) < l-1$, а так как по формулам (4) имеем $\boldsymbol{\rho}(n) = \boldsymbol{\rho}(2m+1) + \theta_1$, где $0 < \theta_1 < 1$ (ибо $\theta_1 = \dfrac{r(r+3)}{(r+1)(r+2)}$ при $r = \boldsymbol{r}(m)$), то отсюда $-(l-1) < \boldsymbol{\rho}(n) < l$, так что $|\boldsymbol{\rho}(n)| < l$;

2) при $n = 4m+2$ будет $2^l + 2 \leqslant n \leqslant 2^{l+1} - 2$, откуда $2^{l-1} < 2m+1 \leqslant$ $\leqslant 2^l - 1$, и, значит, $-(l-1) \leqslant \boldsymbol{\rho}(2m+1) < l-1$, а так как по формулам (4) имеем $\boldsymbol{\rho}(n) = \boldsymbol{\rho}(2m+1) + \theta_2$, где $0 < \theta_2 < 1$ (ибо $\theta_2 = \dfrac{2}{r+2}$ при $r = \boldsymbol{r}(m)$), то отсюда $-(l-1) < \boldsymbol{\rho}(n) < l$, так что $|\boldsymbol{\rho}(n)| < l$;

3) при $n = 4m+3$, ввиду $n < 2^{l+1} - 1$, будет $2^l + 3 \leqslant n \leqslant 2^{l+1} - 5$, откуда $2^{l-1} < 2m+1 < 2^l - 1$, и, значит, $-(l-1) < \boldsymbol{\rho}(2m+1) < l-1$, а так как по формулам (4) имеем $\boldsymbol{\rho}(n) = \boldsymbol{\rho}(2m+1) - 1$, то отсюда $-l < \boldsymbol{\rho}(n) < l-2$, так что $|\boldsymbol{\rho}(n)| < l$. ★

Следствие. Для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства:

$$\frac{3n - 1 - \lfloor \log_2 n \rfloor}{2} \leqslant \boldsymbol{R}(n) \leqslant \frac{3n - 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor}{2}, \tag{5}$$

в которых как слева, так и справа равенство достигается при бесконечно многих n.

5. Принцип индукции

Построенная нами здесь нумерация $\mathbb{Q}^+$ приводит нас к мысли о том, что вводимый ею, в некотором смысле, «естественный» порядок должен приводить нас к столь же «естественному» процессу индуктивного перехода. В самом деле, по сравнению с $\mathbb{N}$ усложнение невелико: к операции увеличения на единицу добавилась операция взятия обратной величины, и они, слаженно действуя в паре, как хорошие молотобойцы, выковывают одно за другим в совершенном порядке все положительные рациональные числа, начиная с 1. Поэтому нам будет нетрудно сформулировать и доказать следующее утверждение, которое мы вправе будем называть *принципом математической индукции* для положительных рациональных чисел.

Теорема 4. Пусть для каждого положительного рационального числа r задано некоторое утверждение Φ_r. Если утверждение Φ_1 истинно, и из истинности утверждения Φ_r вытекает истинность утверждений Φ_{r+1} и $\Phi_{1/r}$, то все утверждения Φ_r истинны.

Доказательство. Рассмотрим последовательность утверждений $\{\Psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где Ψ_n – это утверждение «Φ_r верно для $r = \boldsymbol{r}(n)$»; ясно, что, в свою очередь, утверждение Φ_r – это, по существу, утверждение «Ψ_n верно для $n = \boldsymbol{n}(r)$». Докажем индукцией по n, что все утверждения Ψ_n верны. База индукции очевидна – Ψ_1 верно, так как $\boldsymbol{r}(1) = 1$, а по условию Φ_1 верно. Пусть теперь $n > 1$; предположим, что утверждения Ψ_m уже доказаны для $1 \leqslant m < n$. Если n чётно, то $n = 2m$, где $m < n$; пусть $r = \boldsymbol{r}(n)$ и $r' = \boldsymbol{r}(m)$. По индуктивному предположению, Ψ_m верно, т. е. верно $\Phi_{r'}$, а так как по условию из этого следует, что верно $\Phi_{r'+1} = \Phi_r$, то верно и Ψ_n. Если же n нечётно, то $n = m+1$, где m чётно и $m < n$; пусть $r = \boldsymbol{r}(n)$ и $r' = \boldsymbol{r}(m)$. По индуктивному предположению, Ψ_m верно, т. е. верно $\Phi_{r'}$, а так как по условию из этого следует, что верно $\Phi_{1/r'} = \Phi_r$, то верно и Ψ_n. ★

Замечание. Заметим, что в доказательстве условием «из Φ_r следует $\Phi_{1/r}$» мы пользовались *только при* $r > 1$: действительно, для чётного m имеем $\boldsymbol{r}(m) = \boldsymbol{r}(\frac{m}{2})+1 > 1$. Поэтому формулировку теоремы можно слегка ослабить: *если истинно Φ_1, из истинности Φ_r вытекает истинность Φ_{r+1}, и из истинности Φ_r при $r > 1$ вытекает истинность $\Phi_{1/r}$, то все Φ_r истинны.*

6. Заключение

В заключение предлагаем читателю несколько задач для самостоятельного решения; содержашиеся в них результаты проливают, как нам кажется, дополнительный свет на причины столь замечательных свойств построенной нами нумерации $\mathbb{Q}^+$.

Задача 1. Доказать, что для любого $h \in \mathbb{N}$ имеется ровно 2^{h-1} положительных рациональных чисел высоты h, а их номера $\boldsymbol{n}(r)$ удовлетворяют неравенствам $2^{h-1} \leqslant \boldsymbol{n}(r) < 2^h$.

Задача 2. Доказать, что для любого $r \in \mathbb{Q}^+$, $0 < r < 1$, имеем $\boldsymbol{h}(1-r) = \boldsymbol{h}(r)$ и $\boldsymbol{n}(1-r) = \boldsymbol{n}(r) + 2\,\mathrm{sgn}(\frac{1}{2} - r)$.